23/9-2014

MAT 1100

Uoppstilte maks/min-problemer

Vi skal se på maks/min-problemer som dukker opp i det virkelige liv. Hoved-utfordringen er å formulere problemet matematisk

Eksempel: En fabrikk produserer sylinder-formede blikkbokser. Materialet som brukes i den krumme sideflaten er dobbelt så dyrt som det som brukes i topp og bunn. Boksen skal være 1 dm^3 og fabrikken ønsker å lage den så billig som mulig. Hva må höyden og radien da være?

Vi lar höyden være h dm og radien r dm. Da er volumet til boksen

$$1 = V = \pi r^2 h \quad \text{som gir} \quad h = \frac{1}{\pi r^2}.$$

Dersom materialet i topp og bunn koster a kroner per dm^2, er materialkostnaden

$$K = \underbrace{2a\pi r^2}_{\text{bunn og topp}} + \underbrace{2a \cdot 2\pi r h}_{\text{sidekant}} = 2\pi a r^2 + 4\pi r h a$$

Bruker vi at $h = \frac{1}{\pi r^2}$, får vi

$$K = 2\pi a r^2 + \frac{4a}{r}$$

som gir kostnadene som en funksjon av r.
Vi deriverer

$$K'(r) = 4\pi a r - \frac{4a}{r^2}$$

Den deriverte er null når

$$4\pi a r - \frac{4a}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \underline{\underline{\sqrt[3]{\pi}}}$$

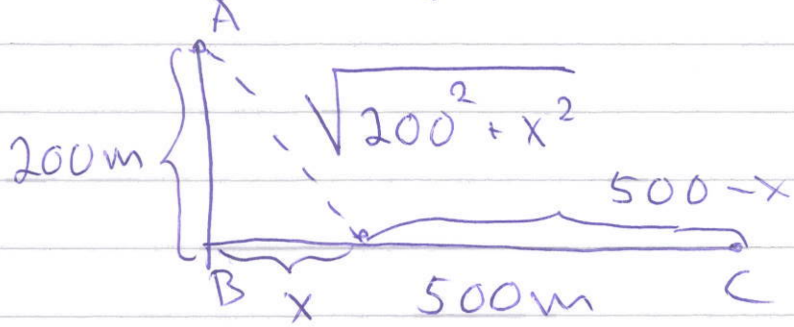
Siden den deriverte skifter fra negativ til positiv når vi passerer $\sqrt[3]{\pi}$, er dette et minimumspunkt, og det er lett å se at det er globalt minimum. Den tilhørende h-verdien er

$$h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi \cdot \pi^{2/3}} = \underline{\underline{\frac{1}{\pi^{5/3}}}}$$

Her en oppgave fra midtveiseksamen i 2008

<u>Eksempel</u> Du padler i en kajakk og er på et punkt A utenfor en rettlinjet. Avstanden fra A til nærmeste punkt B på stranden er 200m. Du ønsker å komme til en hytte C i strandkanten som ligger i C,

500 meter fra B. Du vil padle med en hastighet ~~på~~ på 100 meter/minutt til du treffer stranden og så løpe videre mot ~~hytta~~ hytta med en fart på 300 meter/minutt
Hvordan løper du raskest



Formel: $t = \frac{s}{v}$

Total tid: $T(x) = \frac{\sqrt{200^2+x^2}}{100} + \frac{500-x}{300}$

Deriverer: $T'(x) = \frac{1}{200\sqrt{200^2+x^2}} \cdot 2x - \frac{1}{300}$

$$= \frac{x}{100\sqrt{200^2+x^2}} - \frac{1}{300}$$

Setter vi $T'(x) = 0$, får vi

$$3x = \sqrt{200^2+x^2}$$

Vi kvadrerer og får

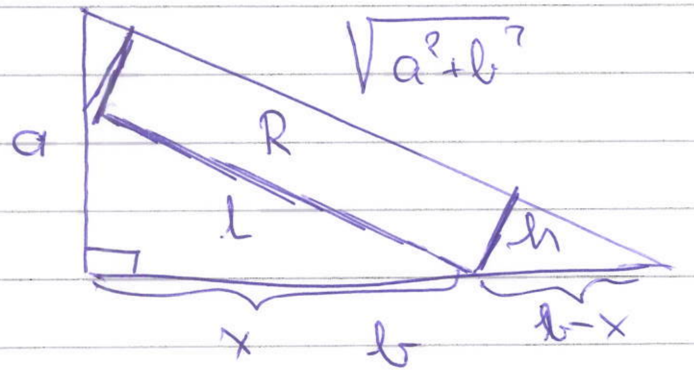
$$9x^2 = 200^2 + x^2$$

dvs $\quad x^2 = 25 \cdot 200$

som gir $\quad x = 50\sqrt{2}$ (x må være positiv)

Fortegnsskjemaet viser at dette er et minimumspunkt, og dermed har vi funnet den mest effektive reiseveien.

Eksempel: Figuren viser et rektangel innskrevet i en rettvinklet trekant. Hva er det største arealet en slik rektangel kan ha.



Rektangelets areal er: $R = l\,h$

Vi må finne l og h:

$$\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{x}{b} \Rightarrow l = \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{b}$$

$$\frac{h}{b-x} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow h = \frac{a(b-x)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Dermed er: $R(x) = l \cdot h = \frac{ax(b-x)}{b} = \frac{a}{b}(bx - x^2)$

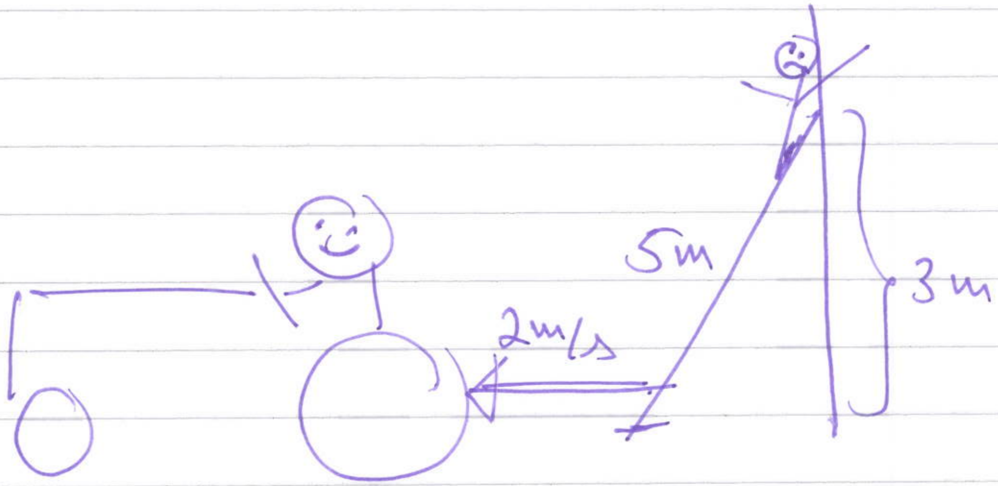
Derivasjon gir: $R'(x) = \frac{a}{b}(b-2x)$ som gir

et maksimum for $x = \frac{b}{2}$.

Koblede hastigheter

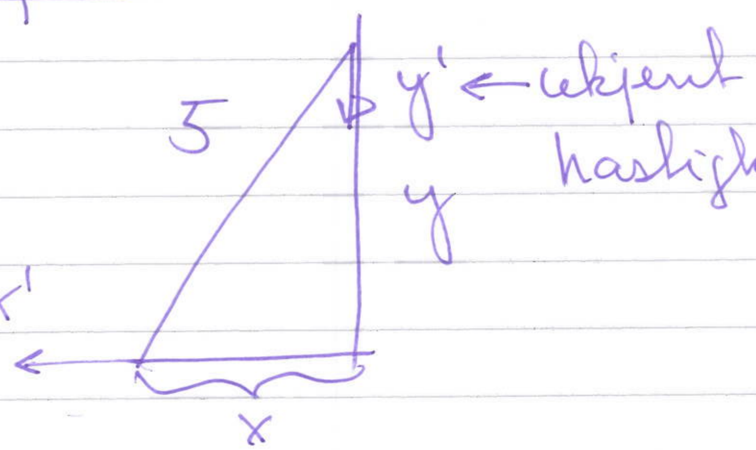
I disse oppgavene har vi to objekter som er koblet sammen på en eller annen måte. Vi kjenner hastigheten til det ene objektet og ønsker å finne hastigheten til det andre.

Eksempel:



Hva fort beveger toppen av stigen seg mot bakken?

Generell situasjon:



Ved Pytagoras: $x^2(t) + y^2(t) = 25$

Deriverer m.h.p t: $2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$

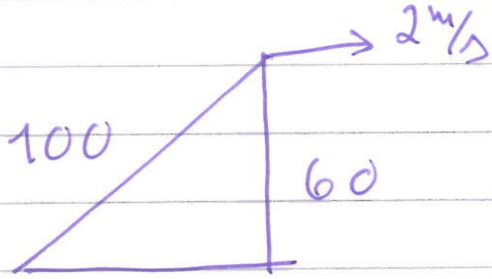
som gir $y'(t) = -\frac{x(t)}{y(t)} x'(t)$

Vi vet at $x(t) = 3$, $x' = 2$. Vi kan regne ut y ved Pytagoras

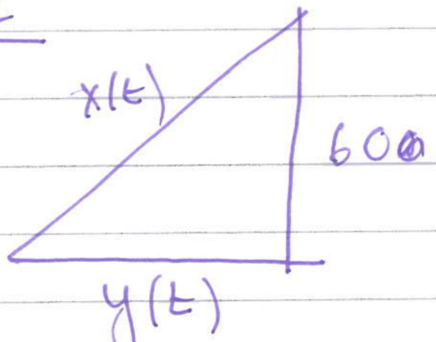
$$x^2 + y^2 = 25, \; y^2 = 25 - 3^2 = 16, \; y = 4.$$

Dermed er $y'(t) = -\frac{3}{4} \cdot 2 = -\frac{3}{2}$ m/s.

Eksempel: En ~~[illegible]~~ drage flyr i en konstant høyde 60 meter over bakken. Farten er 2 m/s. Hvor fort løper snøret ut når det allerede er 100 meter ute?



Generelt



Kjenner $y'(t)$, vil finne $x'(t)$.

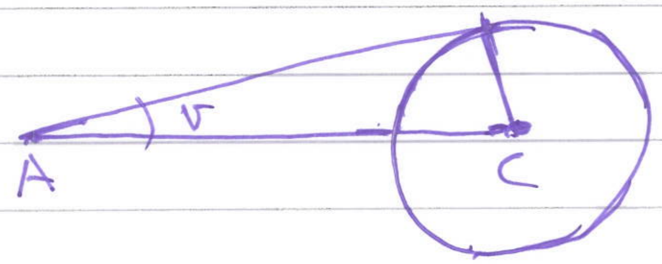
Pythagoras: $60^2 + y(t)^2 = x(t)^2$

Deriver: $2y(t)y'(t) = 2x(t)x'(t)$, $x'(t) = \frac{y(t)y'(t)}{x(t)}$.

Må finne y: $y = \sqrt{100^2 - 60^2} = 80.$

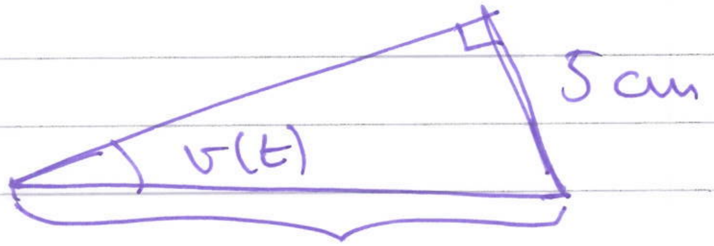
$$x'(t) = \frac{80}{100} \cdot 2\,\text{m/s} = \underline{1.6\,\text{m/s}}$$

<u>Eksempel</u> (deleksamen 2011): En sirkulær skive med radius 5 cm beveger seg langs en rett linje mot A



Når avstanden fra A til C er 13 cm, økes vinkelen v med 0.5 radianer per sekund. Hva fort nærmer sirkelen seg A i dette øyeblikket.

Generell situasjon:



$$\sin v(t) = \frac{5}{x(t)}$$

<u>Deriverer:</u>

$$\cos v(t)\, v'(t) = -\frac{5}{x(t)^2} x'(t)$$

som gir $$x'(t) = -\frac{\cos v(t)\, v'(t)}{5} x(t)^2$$

Vi har $\sin v = \frac{5}{13}$, $\cos v = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$.

Dermed er

$$x'(t) = -\frac{\frac{12}{13} \cdot 0.5}{5} \cdot 13^2 = -\frac{12 \cdot 13}{10} - \underline{15.6 \, \mathrm{cm/s}}$$