UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Ny/Utsatt eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus.
Eksamensdag:	Torsdag 12. januar 2012.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 0 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

SVARENE I DENNE DELEN SKAL FØRES INN PÅ DET VEDLAGTE SVARARKET SOM LEVERES SAMMEN MED RESTEN AV BESVARELSEN.

Oppgave 1. (3 poeng) Hvis $f(x,y) = ye^{-xy^2}$, er $\frac{\partial f}{\partial y}$ lik:

A) $-y^3e^{-xy^2}$
B) $-2xy^2e^{-xy^2}$
C) $e^{-xy^2} - ye^{-xy^2}$
D) $e^{-xy^2} - 2xy^2e^{-xy^2}$
E) $e^{-xy^2} - xye^{-xy^2}$

Oppgave 2. (3 poeng) Hvis $f(x,y) = x^2y + y^3$, så er den dobbeltderiverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ lik:

A) $2x$
B) $2x + 3y^2$
C) 0
D) $2xy + 3y^2$
E) 2

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. (3 poeng) Hvis $f(x,y) = \arctan(xy^2)$, så er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$, der $\mathbf{a} = (1,1)$ og $\mathbf{r} = (-1,2)$, lik:

A) $\frac{3}{2}$
B) $\frac{7}{2}$
C) 1
D) 0
E) $\frac{5}{2}$

Oppgave 4. (3 poeng) Den rette linjen gjennom punktene $(0,1,-1,2)$ og $(1,1,-1,3)$ har parametriseringen:

A) $\mathbf{r}(t) = (t, 1+t, -1-t, 2+3t)$
B) $\mathbf{r}(t) = (t, 1-t, -1+t, 2-3t)$
C) $\mathbf{r}(t) = (t, 1, -1, 2+t)$
D) $\mathbf{r}(t) = (t, 1, -1, 2+3t)$
E) $\mathbf{r}(t) = (1, 1+t, -1-t, 3+2t)$

Oppgave 5. (3 poeng) Hvis en trekant er utspent av vektorene $(1,3,-2)$ og $(1,-1,-2)$, så er arealet:

A) $\frac{5}{2}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $\frac{7}{2}$
D) 3
E) $2\sqrt{5}$

Oppgave 6. (3 poeng) Den deriverte til $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$ er lik:

A) $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$
B) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$
C) $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$
D) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
E) $-\frac{1}{2\sqrt{x}\sin^2(\sqrt{x})}$

Oppgave 7. (3 poeng) Når du skal delbrøkoppspalte $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^5-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}$, må du først:

A) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$
B) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$
C) polynomdividere
D) finne konstanter A, B, C, D slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$
E) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x^2+2x+2}$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. (3 poeng) Dersom $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, så er BA lik:

A) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -10 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 0 & 11 & 3 \end{pmatrix}$

C) dimensjonene stemmer ikke, så produktet er udefinert.

D) $\begin{pmatrix} 3 & -10 & 0 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 11 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

Oppgave 9. (3 poeng) Hvis $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}}\,dt$, så er $f'(2)$ lik:

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{4}{\sqrt{13}}$
C) $\frac{1}{\sqrt{13}}$
D) $\frac{4}{3}$
E) $\frac{4}{5}$

Oppgave 10. (3 poeng) Det uegentlige integralet $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx$

A) divergerer
B) er lik π
C) er lik $\ln 8$
D) er lik $10 \ln 2$
E) er lik $-\ln(\ln 2)$

OPPGAVESETTET FORTSETTER MED DEL 2 PÅ NESTE SIDE

(Fortsettes på side 4.)

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 11. (10 poeng) Finn grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$$

der a er et reelt tall.

Oppgave 12. (10 poeng) Funksjonen

$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

er definert for $x \neq 0$. Regn ut gradienten $\nabla f(x,y)$. I hvilken retning vokser funksjonen raskest i punktet $\mathbf{a} = (x,y)$? I hvilke retninger er den retningsderiverte lik 0 i dette punktet?

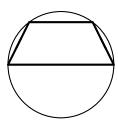
Oppgave 13. (10 poeng) Finn en 2×2-matrise M slik at

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 14. (10 poeng) Vis at funksjonen $f(x) = x^3 + 2x + 4$ er injektiv og har en omvendt funksjon g. Finn $g'(4)$.

Oppgave 15. (10 poeng) Området under grafen til funksjonen $f(x) = \arctan x$, $0 \leq x \leq 1$, dreies om y-aksen. Finn volumet til omdreiningslegemet.

Oppgave 16. (10 poeng) Figuren viser et trapes innskrevet i en sirkel med radius 1. Grunnlinjen til trapeset er diameter i sirkelen. Hva er det største arealet trapeset kan ha?



Oppgave 17. (10 poeng) Anta at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon med $f(0) = 0$. Vis at dersom f er deriverbar i 0, finnes det en kontinuerlig funksjon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at $f(x) = xg(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

SLUTT

(Fortsettes på side 5.)