Integrasjon

Repetisjon: Hvis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en begrenset funksjon, definerte vi

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{Ø(\Pi) : \Pi \text{ en partisjon av } [a,b]\} \quad \text{øvre integral}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{N(\Pi) : \text{———} \;''\; \text{———}\} \quad \text{nedre integral}$$

Generelt er $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \ge \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Dersom $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, så sier vi at f er integrerbar, og definerer integralet

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Definisjon: Dersom $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en begrenset funksjon, så er en antiderivert til f på $[a,b]$ en kontinuerlig funksjon $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ slik at $F'(x)=f(x)$ i alle $x\in(a,b)$.

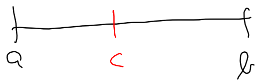
Setning: Hvis F og G er to antideriverte av f på $[a,b]$, så er $F(x)=G(x)+C$ for en konstant.

Bevis: La $H(x)=F(x)-G(x)$, så er $H'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$ i alle $x\in(a,b)$.

Dette betyr at $H(x)=C$ (konstant), dvs

$$F(x)-G(x)=C \Rightarrow F(x)=G(x)+C$$

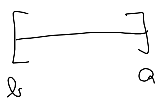
Setning: Hvis $c\in[a,b]$, så er



$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

Vi har definert $\underline{\int_a^b}, \overline{\int_a^b}, \int_a^b$ når $a\le b$. Hva når $a>b$?



$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = -\underline{\int_b^a} f(x)\,dx$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = -\overline{\int_b^a} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Hvorfor minus? Fordi da vil reglene

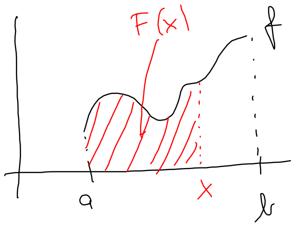
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

uansett rekkefølge på a, b og c

Analysens fundamentalteorem: Dersom $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig, så er f integrerbar på alle intervaller $[a,x]$ der $x\in[a,b]$, og funksjonen

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

er en antiderivert til f.



Bevisskisse: Siden f er kontinuerlig, er den begrenset ifølge ekstremalverdisetning. $F'(x)=f(x)$

Følgelig eksisterer

$$G(x)=\overline{\int_a^x} f(t)\,dt$$

$$H(x)=\underline{\int_a^x} f(t)\,dt$$

Må vise at $G(x)=H(x)$, og at $G'(x)=f(x)$ for alle $x\in(a,b)$

Bevisidé: Vi skal vise at $\boxed{G'(x)=H'(x)=f(x)}$. Da er både G og H antideriverte f, så $G(x)=H(x)+C$ for en konstant C. Siden $G(a)=H(a)=0$, må $C=0$. Dermed er $G(x)=H(x)$, som betyr at f er integrerbar på $[a,x]$, og $F(x)=G(x)$, så $F'(x)=G'(x)=f(x)$.

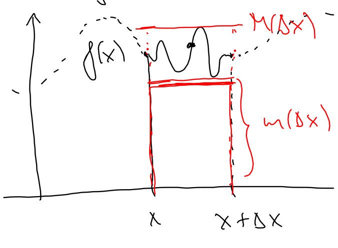
Viser at $G'(x)=f(x)$ (argumentet for at $H'(x)=f(x)$ er helt tilsvarende):

$$G'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{\int_a^{x+\Delta x}}f(t)\,dt-\overline{\int_a^{x}}f(t)\,dt}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\overline{\int_a^{x}}f(t)\,dt}+\overline{\int_x^{x+\Delta x}}f(t)\,dt-\cancel{\overline{\int_a^{x}}f(t)\,dt}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{\int_x^{x+\Delta x}}f(t)\,dt}{\Delta x}\stackrel{?}{=}f(x)$$

Håper.

Argument (for positive Δx):



$$M(\Delta x)=\sup\{f(t): t\in[x,x+\Delta x]\}$$
$$m(\Delta x)=\inf\{f(t): t\in[x,x+\Delta x]\}$$

$$m(\Delta x)\,\Delta x\le\overline{\int_x^{x+\Delta x}}f(t)\,dt\le M(\Delta x)\,\Delta x$$

Siden f er kontinuerlig, så vil $m(\Delta x)\to f(x)$ og $M(\Delta x)\to f(x)$ når $\Delta x\to 0$.

Dermed:

$$\begin{array}{ccccc} m(\Delta x) & \le & \dfrac{\overline{\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,dt}{\Delta x} & \le & M(\Delta x)\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f(x) & & f(x) & & f(x)\end{array}$$

Dette betyr at $G'(x)=f(x)$, og setningen er bevist.

Korollar: Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og at K er en antiderivert til f. Da er

$$\int_a^b f(x)\,dx = K(b) - K(a) = \underbrace{[K(x)]_a^b = K(x)\Big|_a^b}_{\text{notasjon}}$$

Bevis: Vi vet at

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

er en antiderivert til f, så $F(x) = K(x) + C$ for en konstant C. Vi har

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = F(b) - \underbrace{F(a)}_{0} = (K(b) + \cancel{C}) - (K(a) + \cancel{C})$$

$$= K(b) - K(a)$$

Eksempel:

$$\int_0^a x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Ser at $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ er en antiderivert til x^n

Eksempel: Hva med $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$?

De antideriverte er ikke elementære funksjoner

Ubestemte integraler

Hvis f er en kontinuerlig funksjon, så er det **ubestemte integralet**

$$\int f(x)\,dx$$

den generelle antideriverte til f, dvs hvis F én antiderivert til f, så er

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Vi har:

$$\int a\,dx = ax + C \qquad (a \text{ er konstant})$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad \text{for } r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

Generelle regler: $\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ k konstant

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Enkel substitusjon: Hvis F er en antiderivert til f

$$\int f(g(x))\,\underline{g'(x)}\,dx = F(g(x)) + C$$

Hvorfor: Må vise $F(g(x))' = f(g(x))g'(x)$.

Kjerneregel: $F(g(x))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$

Huskeregel: Innfører ny variabel $u = g(x)$, $\frac{du}{dx} = g'(x)$

$du = g'(x)\,dx$:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C$$
$$= F(g(x)) + C$$

Eksempel: $$\int \frac{1}{9 + x^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{9}}{1 + \frac{x^2}{9}}\,dx$$

lurde vært 1

$u = \frac{x}{3}$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$, $du = \frac{1}{3}dx$

$$= \int \frac{\frac{1}{9}}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\,dx}{1 + u^2} = \int \frac{\frac{1}{3}}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{3}\arctan u + C = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$$

Eksempel: $\cancel{\int \frac{\cos x}{\ln(\sin x)}\,dx \quad u = \sin x}$ Dust!

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$du = -\sin x\,dx$

$$= \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C$$
$$= -\ln|\cos x| + C$$

okt 1-11:45