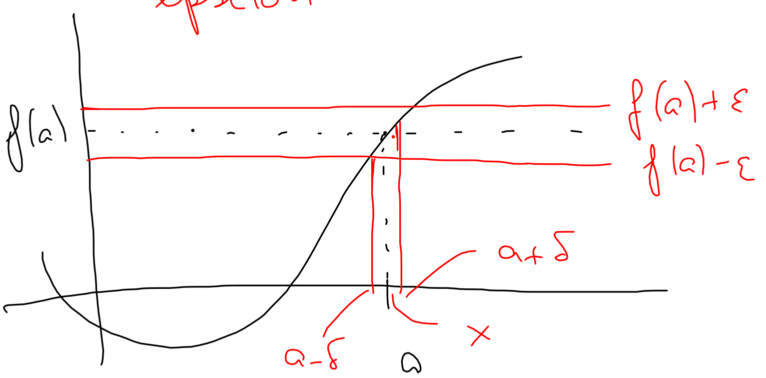
Kontinuitet

Definisjon: f er kontinuerlig i punktet a dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $|x-a| < \delta$ og $x \in D_f$, så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

epsilon

delta



Eksempel: Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonen $f(x) = 3x^2 + 2$ er kontinuerlig i punktet $a = 2$.

Vi må altså vise at dersom vi er gitt en $\varepsilon > 0$, så finnes det en $\delta > 0$ slik at når $|\underbrace{x-2}_{h}| < \delta$, så er $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$. Setter $h = x - 2$, dvs. $x = 2 + h$. Vi har

$$|f(x) - f(2)| = |3x^2 + 2 - (3 \cdot 2^2 + 2)| = |3(2+h)^2 + \cancel{2} - 12 - \cancel{2}|$$

$$= |3(\cancel{4} + 4h + h^2) - \cancel{12}| = |12h + 3h^2| = 3|h|\underbrace{|4+h|}_{\leq 5}$$

$15|h|$

Velger nå $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{15}, 1\right\}$. Hvis $|\underbrace{x-2}_{h}| < \delta$, så

$$|f(x) - f(2)| = 3\underbrace{|h|}_{<\frac{\varepsilon}{15}}\underbrace{|4+h|}_{\leq 5} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{15} \cdot 5 = \varepsilon$$

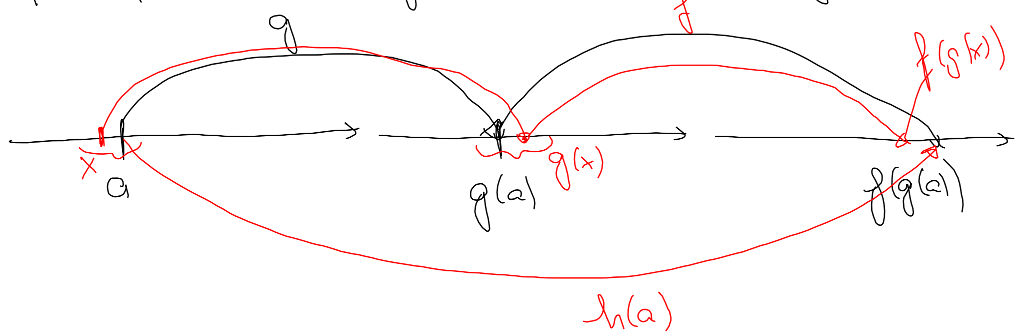
$|h| < \frac{\varepsilon}{15}$

HURRA!

For å sjekke at funksjoner gitt ved formler er kontinuerlige, finnes det mange regler man kan bruke for å slippe ε og δ hver gang.

Teorem: Anta at f, g er kontinuerlige i a. Da er også $f+g$, $f-g$, fg kontinuerlige i a. Det samme er $\frac{f}{g}$ forutsatt at $g(a) \neq 0$.

Teorem: Anta at g er kontinuerlig i a og at f er kontinuerlig i $g(a)$. Da er den sammensatte funksjonen $h(x) = f(g(x))$ er kontinuerlig i a.



Teorem: Funksjonene x^a, a^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ er kontinuerlig alle steder der de er definert.

Eksempel: Bruk reglene ovenfor til å vise at funksjonen

$$f(x) = \frac{\ln(e^x+1)}{x^2+1}$$ kontinuerlige

er kontinuerlig for alle x. Ser at funksjonen er definert for alle x.

Trinnvis: e^x er kontinuerlig og 1 er det, så e^x+1 er kont.

Siden $\ln$ er kontinuerlig, er dermed den sammensatte funksjon $\underbrace{\ln}_{f}(\underbrace{e^x+1}_{g})$ kontinuerlig

Tilsvarende er x^2 kontinuerlig og dermed er x^2+1 kont.

Siden både telleren og nevneren er kontinuerlig og nevneren er forskjellig fra 0, så er brøken

$$f(x) = \frac{\ln(e^x+1)}{x^2+1}$$ kontinuerlig.

Annen "oppfatning" av kontinuitet:

"f er kontinuerlig i a dersom $f(x)$ nærmer seg $f(a)$ når x går mot a"

Teorem: f er kontinuerlig i a hvis og bare hvis $f(x_n) \to f(a)$ for enhver følge $\{x_n\}$ i D_f som går mot a.

Bevis: Anta at f er kontinuerlig i a og at $x_n \to a$. Vi må vise at $f(x_n) \to f(a)$. Vi må altså vise at gitt $\varepsilon > 0$, så finnes det alltid en N slik at når $n \geq N$, så $|f(a) - f(x_n)| < \varepsilon$. Siden f er kontinuerlig i a, finnes det en $\delta > 0$ slik at når $|x-a| < \delta$, så er $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$. Siden $x_n \to a$, finnes det en N slik at når $n \geq N$, så er $|x_n - a| < \delta$. Hvis $n \geq N$, er dermed $|x_n - a| < \delta$ og følgelig $|f(a) - f(x_n)| < \varepsilon$

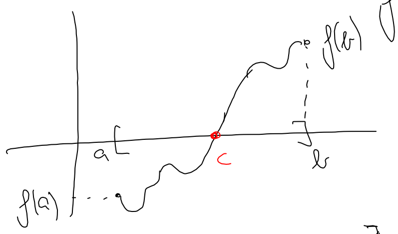
Det gjenstår å vise at dersom f ikke er kontinuerlig i a, så finnes det i hvert fall én følge $\{x_n\}$ slik $x_n \to a$, men $f(x_n) \not\to f(a)$.

Siden f ikke er kontinuerlig i a, må det finnes en $\varepsilon > 0$ slik at uansett hvor liten vi velger $\delta > 0$, så finnes det en x med $|x-a| < \delta$ slik at $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Spesielt må det for hver n finnes en x_n slik at $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ og $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Da vil $x_n \to a$, men $f(x_n) \not\to f(a)$ (siden avstanden hele tiden er større enn ε)

Skjæringssetningen

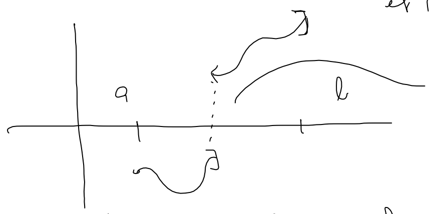
Grunnleggende spørsmål:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$



Hvis $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn, har da f nødvendigvis et nullpunkt?

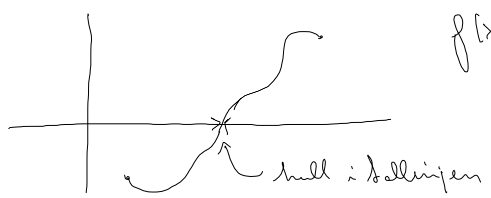
Nei



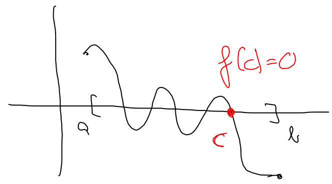
diskontinuerlig

Presisering: Hva hvis f er kontinuerlig?

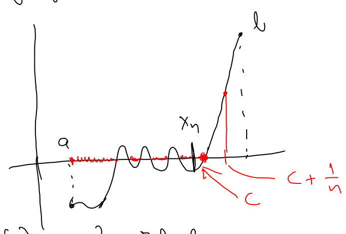
$f(x) = x^2 - 2$



Skjæringssetningen: Hvis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og $f(a)$ og $f(b)$ har motsatte fortegn, så har f et nullpunkt c i intervallet (a,b).



Bevis: Anta at $f(a) < 0$ og $f(b) > 0$.



La $A = \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$. Ifølge kompletthetsprinsippet har A en minste øvre skranke c. Vi må vise at $f(c) = 0$. Dette skal vi gjøre ved å vise først at $f(c) \geq 0$ og deretter at $f(c) \leq 0$.

Per definisjon av c er $f(c+\frac{1}{n}) > 0$. Siden $c + \frac{1}{n} \to c$, og siden f er kontinuerlig, må $\underbrace{f(c+\tfrac{1}{n})}_{\substack{\vee\\0}} \to f(c)$.

Altså er $f(c) \geq 0$.

Siden c er supremum til A, finnes det en følge $\{x_n\}$ i A som konvergerer mot c. Siden $x_n \in A$, så er $f(x_n) \leq 0$. Siden $x_n \to c$ og f er kontinuerlig, må $\underset{\substack{\wedge\!|\\0}}{f(x_n)} \to \underset{\wedge\!|}{f(c)}$. Altså er $f(c) \leq 0$. Følgelig er $f(c) = 0$. HURRA!