Kryssproduktet

Bare definert for 3-tupler, altså for vektorer i rommet.

Algebraisk definisjon: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

Huskeregel:

$$\begin{array}{cccccc}
\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\
a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3\\
b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3\\
- & - & - & + & + & +
\end{array}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

Observer at:

$$\vec{b}\times\vec{a}=(b_2a_3-b_3a_2)\vec{i}+(b_3a_1-b_1a_3)\vec{j}+(b_1a_2-b_2a_1)\vec{k}$$

$$=(a_3b_2-a_2b_3)\vec{i}+(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_2b_1-a_1b_2)\vec{k}$$

$$=-(\vec{a}\times\vec{b})$$ Antikommutativt!

Andre regneregler:

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$

(ii) $(c\vec{a})\times\vec{b}=c(\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{a}\times(c\vec{b})=c(\vec{a}\times\vec{b})$

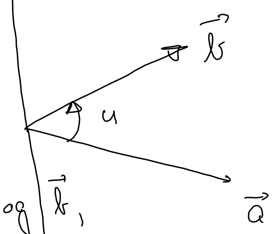
(iii) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

NB: Vi har ikke $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\overset{\text{ikke}}{=}(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

Altså gir ikke $\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}$ mening

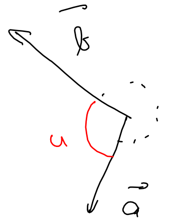
Geometrisk definisjon:

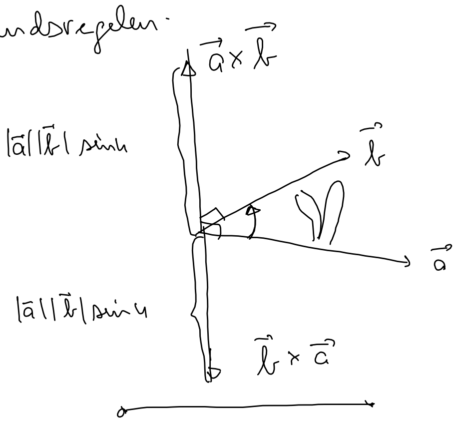
$\vec{a}\times\vec{b}$ er vektoren som står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$, har lengde $|\vec{a}||\vec{b}|\sin u$, og har retning gitt av høyrehåndsregelen.



Vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$0^\circ \le u < 180^\circ$



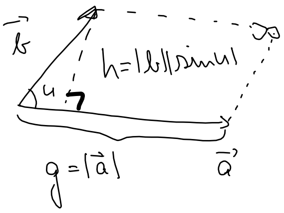


Fordelen ved den algebraiske definisjonen: Lett å regne ut.

—— // —— geometriske —— , ——: Lett å tolke.

$\vec{a}=(-1,7,\sqrt{2})$ $\quad \vec{b}=(-3,2,-1)$

Arealer:



Parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$A = g\,h = |\vec{a}||\vec{b}|\sin u = |\vec{a}\times\vec{b}|$

Eksempel:

$\vec{a}=(1,-1,3)$, $\vec{b}=(2,1,-4)$

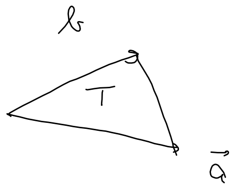
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{array}{cccccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 2 & 1 & -4 \end{array} = (4-3)\vec{i} + (6-(-4))\vec{j} + (1-(-2))\vec{k}$$

$$= 1\vec{i} + 10\vec{j} + 3\vec{k} = (1,10,3)$$

$$A = |(1,10,3)| = \sqrt{1^2+10^2+3^2} = \underline{\underline{\sqrt{110}}}$$

Trekanten utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

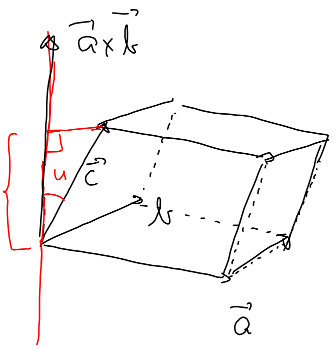
$A = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$



Volumer:

$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos u$

$|\vec{c}|\cos u = h$



parallellepiped

Vinkel mellom $\vec{c}$ og $\vec{a}\times\vec{b}$

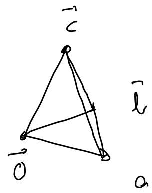
$$V = g\cdot h = \text{grunnflate} \times \text{höyde} = \underbrace{|\vec{a}\times\vec{b}|}_{\text{grunnflate}}\ \underbrace{|\vec{c}||\cos u|}_{\text{höyde}}$$

$$= |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

Volumet til parallellepipedet utspent av $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ er

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|.$$

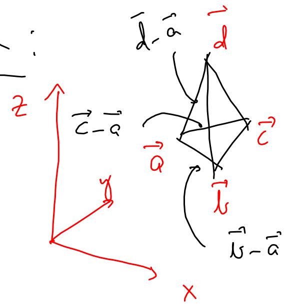
Pyramiden utspent:



$$V = \frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

$$V = \frac{1}{3}gh$$

Eksempel:



Regn ut volumet til pyramiden.

Pyramiden er utspent av $\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{c}-\vec{a}$ og $\vec{d}-\vec{a}$.

Anta $\vec{a} = (1,-1,1)$, $\vec{b} = (2,-1,-2)$, $\vec{c} = (1,0,-1)$, $\vec{d} = (3,4,4)$

$\vec{b}-\vec{a} = (1,0,-3)$

$\vec{c}-\vec{a} = (0,1,-2)$

$\vec{d}-\vec{a} = (2,5,3)$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})\right]\cdot(\vec{d}-\vec{a})\right|$$

$$(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a}) = \begin{array}{cccccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array} = (0-(-3))\vec{i} + (0-(-2))\vec{j} + (1-0)\vec{k}$$

$$= 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (3,2,1)$$

$$\left[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})\right]\cdot(\vec{d}-\vec{a}) = (3,2,1)\cdot(2,5,3) = \underbrace{3\cdot 2}_{6} + \underbrace{2\cdot 5}_{10} + \underbrace{1\cdot 3}_{3} = \underline{\underline{19}}$$

$$V = \frac{1}{6}\cdot 19 = \underline{\underline{\frac{19}{6}}}$$

nov 4-12:52

Matriser

En $m \times n$-matrise er et rektangulært oppsett med tall med m linjer (rader) og n søyler:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

<u>Notasjon</u>: a_{ij} står i i-te rad og j-te søyle

$\boxed{a_{17,23}}$ a_{1723}

<u>Eksempel</u>: $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \pi \end{bmatrix}$ er en 2×3-matrise

$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -2 & e \\ 3 & 0.17 \end{bmatrix}$ er en 3×2-matrise.

<u>Enkle operasjoner</u>: Hvis A og B er $m \times n$-matriser, så

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}, & a_{12}+b_{12}, \ldots, & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1}, & a_{m2}+b_{m2}, \ldots, & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

og tilsvarende for $A - B$

Hvis c er et tall, setter

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & & ca_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

<u>Eksempel</u>: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$3A + 2B = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 3 & \frac{3}{2} & 9 \end{bmatrix}}_{3A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix}}_{2B} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 16 \\ 1 & \frac{11}{2} & 17 \end{bmatrix}$$

Den transponerte A^T til en $m \times n$-matrise er den $n \times m$-matrisen vi får ved å bytte rader og søyler:

$$\underset{3\times 2}{A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}} \qquad \underset{2\times 3}{A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}}$$

En $1 \times n$-matrise: $[a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}]$ – et n-tuppel, <u>radvektor</u>

$m \times 1$-matrise: $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ – m-tuppel, <u>søylevektor</u>

<u>Hvordan ganger vi matriser</u>: Opplagt idé:

A, B $m \times n$-matriser, så kanskje

$$AB = \cancel{\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}}$$

Hadamard-produktet.

Matriser brukes primært til å transformere vektorer:

A $m \times n$-matrise:

$$\begin{tikzcd} \vec{x} \arrow[rr, bend left, "\text{bruker } A \text{ på } \vec{x}"] & & \vec{y} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Egentlig $\vec{y} = A\vec{x}$

ganger

$$\begin{tikzcd} \vec{x} \arrow[r, bend left, "A"] \arrow[rr, bend right, "C"'] & \vec{y} \arrow[r, bend left, "B"] & \vec{z} \end{tikzcd}$$

$C = BA$