Matriser

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad m\times n\text{-matriser}$$

Bakerier

	A	B	C	D
type 1	20%	30%	50%	30%
type 2	40%	30%	30%	40%
type 3	40%	40%	20%	30%

A = 1000
B = 2000
C = 3000
D = 1000

Totalt:

type 1: $\underbrace{0.2\cdot 1000}_{200} + \underbrace{0.3\cdot 2000}_{600} + \underbrace{0.5\cdot 3000}_{1500} + \underbrace{0.3\cdot 1000}_{300} = 2600$

type 2: $\underbrace{0.4\cdot 1000}_{400} + \underbrace{0.3\cdot 2000}_{600} + \underbrace{0.3\cdot 3000}_{900} + \underbrace{0.4\cdot 1000}_{400} = 2300$

type 3: $\underbrace{0.4\cdot 1000}_{400} + \underbrace{0.4\cdot 2000}_{800} + \underbrace{0.2\cdot 3000}_{600} + \underbrace{0.3\cdot 1000}_{300} = 2100$

transformert

$$M = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 3000 \\ 1000 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2600 \\ 2300 \\ 2100 \end{pmatrix}$$

Definisjon: Anta at A er en $m\times n$-matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ og } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ en vektor}$$

Da definer vi

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

som er en søylevektor med m-komponenter.

Eksempel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 3\times 4\text{-matrise} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \overset{2}{1\cdot 2} + \overset{6}{2\cdot 3} + \overset{1}{(-1)(-1)} + \overset{6}{3\cdot 2} \\ \overset{4}{2\cdot 2} + \overset{0}{0\cdot 3} + \overset{-1}{1(-1)} + \overset{8}{4\cdot 2} \\ -1\cdot 2 + (-2)\cdot 3 + 0\cdot(-1) + 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\quad -2 \quad -6 \quad 0 \quad 6$

Regneregler:

(i) $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$

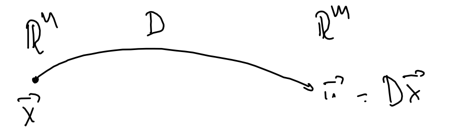
(ii) $(A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$

(iii) $A(s\vec{x}) = sA\vec{x}$

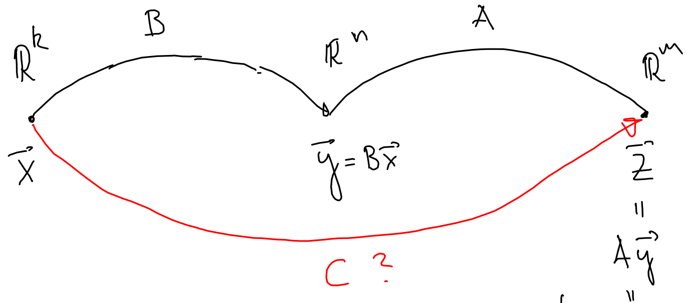
(iv) $(sA)\vec{x} = s(A\vec{x})$

Matrisemultiplikasjon

D : $m \times n$ - matrise $\qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \qquad \vec{y} = D\vec{x} \in \mathbb{R}^m$



$B = n \times k$ - matrise



$A = m \times n$ - matrise

$$\vec{z} = A\vec{y} = A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$$

Finnes det en $m \times k$ - matrise C slik at $\vec{z} = C\vec{x}$?

Ja, det finnes en slik C, og den kalles produktet av A og B;

$C = AB$

Definisjon: Hvis A er en $m \times n$ - matrise og B er en $n \times k$ - matrise, så er produktet $C = AB$ en $m \times k$ - matrise gitt ved at det ij-te elementet er

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}}_{C} i = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}_{A} i \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} j$$

c_{ij} er skalarproduktet av den i-te raden i A og den j-te söylen i B

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$3 \times 2 \qquad 2 \times 3$

$$C = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + (-1)3 & 3\cdot 1 + (-1)(-1) & 3\cdot 0 + (-1)\cdot 2 \\ 2\cdot 2 + 4\cdot 3 & 2\cdot 1 + 4\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 4\cdot 2 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 3 & 1\cdot 1 + 0(-1) & 1\cdot 0 + 0\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 16 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opprydning: Produktet av to matriser A og B er bare definert når radene i A er like lange som søylene i B:

$$\underbrace{A}_{m\times n\text{-matrise}} \qquad \underbrace{B}_{n\times k\text{-matrise}} \implies \underbrace{AB}_{m\times k\text{-matrise}}$$

Selv om AB er definert, så behøver ikke BA være det

$n\times k$ ganger $m\times n$

Må ha $k=m$

Anta at $k=m$

AB: $m\times n \;\; n\times m$ ← $m\times m$

BA: $n\times m \;\; m\times n$ ← $n\times n$

Hva hvis $m=n$:

AB: $m\times m \;\; m\times m$ ← $m\times m$

BA: $m\times m \;\; m\times m$ ← $m\times m$

Normalt er $AB \neq BA$

Regneregler:

(i) $(AB)C = A(BC)$

(ii) $A(B+C) = AB + AC$

(iii) $(sA)B = s(AB)$

(iv) $A(sB) = s(AB)$

Observer også at hvis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

To produkter

$A\vec{x}$: A matrise, $\vec{x}$ en vektor

$\underbrace{A}_{m\times n}\;\underbrace{\vec{x}}_{n\times 1}$

matrise × vektor, matrise × matrise } samme resultat

Derfor: $A(\underbrace{B\vec{x}}) \overset{(i)}{=} (AB)\vec{x}$

Identitetsmatriser og inverse matriser

Nå er alle matriser kvadratiske, dvs $n\times n$-matriser.

Identitetsmatriser

$$I_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Bigg\} n$$

Eksempel: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$I_3 A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Generelt: $I_n A = A I_n = A$.

I_n i matriseverdenen "tilsvarer" 1 i tallverdenen.

Hvis $a \neq 0$ er et tall, så finnes det et tall a^{-1} slik at $aa^{-1}=1$

Hvis $A \neq 0$, finnes det da alltid en matrise A^{-1} slik $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$?

NEI! Men det finnes ganske mange som har....

Definisjon: Anta at A er en $n\times n$-matrise. En $n\times n$-matrise B kalles en invers til A dersom $AB=BA=I_n$.

Setning: En matrise A har høyst én invers.

Bevis: Anta at både B og C er inverser til A. Vi skal vise at da må $B=C$. Vi har

$$B = \underbrace{I_n}_{CA} B = (CA)B = C\underbrace{(AB)}_{I_n} = CI_n = C$$

Eksempel: Ikke alle matriser har en invers: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

La oss prøve å finne en invers $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$: Må ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x+2z & 1y+2u \\ 2x+4z & 2y+4u \end{pmatrix}$$

Må ha
$$\begin{cases} x+2z=1 & y+2u=0 \\ 2x+4z=0 & 2y+4u=1 \end{cases}$$
$2x+4z=2$

Selvmotsigende system, ingen løsning.
A har ingen invers.

Hvordan finner man inverser til 2×2-matriser.

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2z & y-2u \\ 3x+z & 3y+u \end{pmatrix}$$

$\| $

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{matrix} x-2z=1 \\ 3x+z=0 \end{matrix}}_{\text{Finn } x,z} \qquad \underbrace{\begin{matrix} y-2u=0 \\ 3y+u=1 \end{matrix}}_{\text{Finn } y,u}$$

Vil $AB=I_n$

Hva med $BA=I_n$