Grenseverdier

Regneregler: Anta at $\lim_{x \to a} f(x) = F$ og $\lim_{x \to a} g(x) = G$.

Da er

(i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = F + G$

(ii) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = F - G$

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = FG$

(iv) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$ forutsatt at $G \neq 0$.

Eksempel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overset{\to 1}{e^x} + \overset{\to 1}{\cos x}}{\underbrace{\sqrt{2 + x^2}}_{\downarrow \sqrt{2}}} = \frac{\lim_{x \to 0} (e^x + \cos x)}{\lim_{x \to 0} \sqrt{2 + x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} e^x + \lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} \sqrt{2 + x^2}} = \frac{1 + 1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

Eksempel:

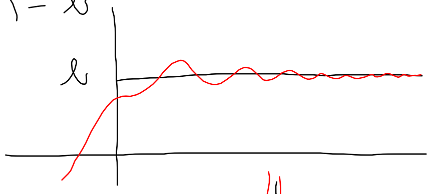
"$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 - 3} = \lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{\cancel{x - \sqrt{3}}}{(\cancel{x - \sqrt{3}})(x + \sqrt{3})} = \lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{1}{x + \sqrt{3}}$$

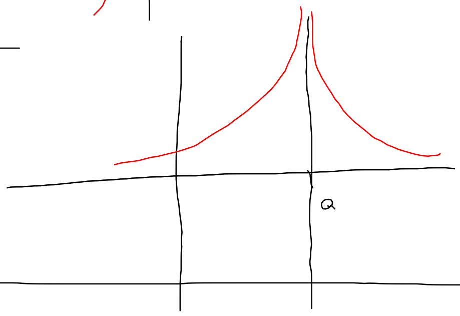
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\underbrace{\sqrt{3}\sqrt{3}}_{3}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{6}}}$$

Varianter: $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

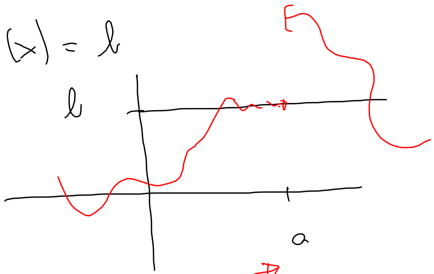


$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$:

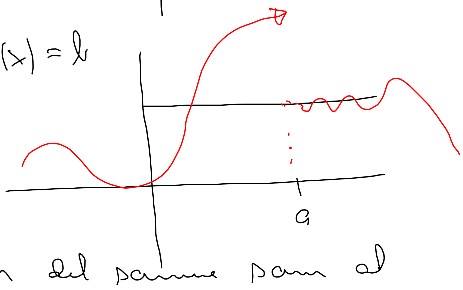


Ensidige grenser:

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$



$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$



Setning: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ er det samme som at

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{og} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Eksempel: Finn $\lim_{x \to 0} f(x)$ når

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{når } x < 0 \\ e^x & \text{når } x \geq 0 \end{cases}$$

Se på de ensidige grensene:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \underline{1} \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} e^x = e^0 = \underline{1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \underline{1}$$

Forbindelse mellom grenseverdier og kontinuitet:

Setning: La $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

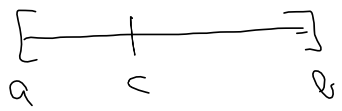
(i) Hvis $c \in (a,b)$, så er f kontinuerlig i c hvis og bare hvis $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

(ii) f er kontinuerlig i a hvis og bare hvis

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

(iii) f er kontinuerlig i b hvis og bare hvis

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$



Hovedpoeng 1: Vi kan sjekke kontinuitet i c ved å vise at $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Hovedpoeng 2: Vi kan også bruke dette til å finne grenseverdier:

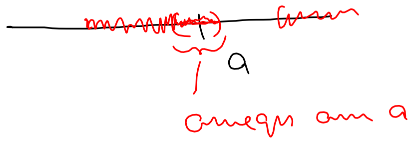
$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x + e^{\cos x}}{x^2 + \ln x} = f(\pi) = \frac{\overset{0}{\sin \pi} + e^{\overset{=-1}{\cos \pi}}}{\pi^2 + \ln \pi} = \frac{e^{-1}}{\pi^2 + \ln \pi} = \frac{1}{e(\pi^2 + \ln \pi)}$$

$f(x)$ kontinuerlig funksjon

Seksjon 6.3: "$\frac{0}{0}$" "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\infty - \infty$", ...

Derivasjon

Definisjon: Anta at f er definert i en omegn om punktet a.



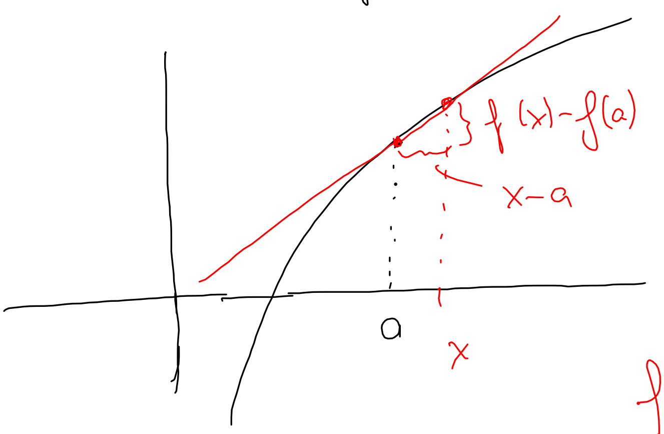
Vi sier at f er deriverbar i a dersom

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

eksisterer. I såfall skriver vi

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

og kaller dette den deriverte til f i punktet a



$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ stigningstall til sekant.

$f'(a)$ stigningstallet til tangenten i punktet a.

Def: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{\underbrace{x-a}_{h}}$, sett $h = x-a$, $x = a+h$

dermed er

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

En hendig versjon er

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Eksempel: $f(x) = x^2$, finne den deriverte ved hjelp av definisjonen:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2a\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2a + h) = \underline{2a}$$

Altså $f'(x) = 2x$ for alle x.

Generelle regler for derivasjon:

(i) $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$

(ii) $\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$

(iii) $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(iv) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

(v) $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\,g'(x)$

Spesielle regler

(i) $C' = 0$ (C er en konstant)

(ii) $(x^r)' = r x^{r-1}$ (r konstant)

(iii) $(e^x)' = e^x$

(iv) $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

(v) $(\sin x)' = \cos x$

(vi) $(\cos x)' = -\sin x$

(vii) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Eksempel: Deriver $f(x) = \underbrace{x^2 e^{\cos x}}_{\text{produkt}}$

$$f'(x) = 2x\, e^{\cos x} + x^2 \cdot e^{\cos x}(-\sin x)$$

$$= x e^{\cos x}(2 - x\sin x)$$

Logaritmisk derivasjon

Setning: Anta at f er deriverbar i x og at $f(x) \neq 0$. Da er

$$f'(x) = \underbrace{f(x)\,(\ln|f(x)|)'}$$

enklere å regne ut enn $f'(x)$.

Bevis: $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$, dvs

$$f'(x) = f(x)(\ln|f(x)|)'$$

Poenget er at vi i visse situasjoner kan bruke regnereglene for logaritmer til å forenkle $\ln|f(x)|$ før vi deriverer: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^r) = r\ln a$ $\quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Eksempel: Deriver $f(x) = x^{\cos x}\sqrt[17]{\tan x}$

$$\ln|x^{\cos x}\sqrt[17]{\tan x}| = \ln|x^{\cos x}| + \underbrace{\ln\sqrt[17]{\tan x}}_{\ln((\tan x)^{1/17})}$$

$$= \cos x \ln|x| + \tfrac{1}{17}\ln(\tan x)$$

$$(\ln|f(x)|)' = \left(\cos x \ln|x| + \tfrac{1}{17}\ln(\tan x)\right)'$$

$$= -\sin x \ln|x| + \cos x\,\frac{1}{x} + \frac{1}{17}\,\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= -\sin x \ln|x| + \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{17}\,\frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x}$$

$$= \underbrace{-\sin x \ln|x| + \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{17\sin x\cos x}}$$

$$f'(x) = f(x)(\ln|f(x)|)' = x^{\cos x}\sqrt[17]{\tan x}\cdot$$

sep 11-09:31

Eksempel: $f(x)=x^x$

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))' = x^x\left[\ln(x^x)\right]'$$

$$= x^x\left[x\ln x\right]' = x^x\left[1\cdot\ln x + x\frac{1}{x}\right]$$

$$= x^x\left[\ln x + 1\right]$$

Alternativ: $f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$

$$f'(x) = e^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$$

Mandag 14^{15}, aud 2, VB