Omlegge: Forelesning: onsdag
Plenum: torsdag

Inverse matriser

Husk: Hvis A er $n \times n$-matrise, så kalles B en invers til A dersom

$$AB = BA = I_n$$

En matrise har høyst én invers, og den betegnes med A^{-1}.

En matrise som har en invers kalles invertibel, og en matrise som ikke har en invers kalles singulær.

Nyttig vink: Dersom $AB = I_n$, så er $BA = I_n$. $BA = I_n$, så er $AB = I_n$. Det holder å sjekke den ene av likhetene $AB = I_n$ og $BA = I_n$

Eksempel: Finn den inverse matrisen til $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2z & y-2u \\ 2x+z & 2y+u \end{pmatrix}$$

Må ha

$x - 2z = 1 \mid \cdot(-2)$ $\qquad y - 2u = 0 \mid \cdot(-2)$

$2x + z = 0$ $\qquad 2y + u = 1$

$-2x + 4z = -2$ $\qquad -2y + 4u = 0$

$5z = -2$ $\qquad 5u = 1$

$z = -\frac{2}{5}$ $\qquad u = \frac{1}{5}$

$x = -\frac{2}{2} = \frac{1}{5}$ $\qquad y = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Har vist at $AA^{-1} = I_2$

Gjør: $A^{-1}A = I_2$

Regneregler for invertering: Anta at A og B er inverterbare $n\times n$-matriser.

(i) Hvis $s \neq 0$, så er (sA) også inverterbar, og $(sA)^{-1} = s^{-1}A^{-1}$

(ii) AB er inverterbar, og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii) A^T er inverterbar og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iv) A^{-1} er inverterbar og $(A^{-1})^{-1} = A$

Bevis: (ii) Det er nok å vise at $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$. Ved den assosiative lov:

$$\underbrace{(AB)}_{C}\underbrace{(B^{-1}A^{-1})}_{} = ((AB)B^{-1})\cdot A^{-1} = (A\underbrace{(BB^{-1})}_{I_n})A^{-1} = \underbrace{(AI_n)}_{A}A^{-1}$$

$$= AA^{-1} = I_n.$$

Normen til en matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \|A\| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_{m1}^2 + \cdots + a_{mn}^2}$$

Setning: Anta at A er en $m\times n$-matrise, at $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ og at $\vec{y} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Da er $|\vec{y}| \leq \|A\|\,|\vec{x}|$

Bevis: Vi har $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1\cdot\vec{x} \\ \vec{a}_2\cdot\vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_m\cdot\vec{x} \end{pmatrix}$ der $\vec{a}_1$ er første linje i A osv.

Schwarz:

$|\vec{a}\cdot\vec{x}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{x}|$

$(\vec{a}\cdot\vec{x})^2 \leq |\vec{a}|^2|\vec{x}|^2$

Dermed

$$|\vec{y}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2} = \sqrt{(\vec{a}_1\cdot\vec{x})^2 + (\vec{a}_2\cdot\vec{x})^2 + \cdots + (\vec{a}_m\cdot\vec{x})^2}$$

$$\leq \sqrt{|a_1|^2|\vec{x}|^2 + |\vec{a}_2|^2|\vec{x}|^2 + \cdots + |\vec{a}_m|^2|\vec{x}|^2}$$

$$= |\vec{x}|\sqrt{\underbrace{|\vec{a}_1|^2}_{} + \underbrace{|\vec{a}_2|^2}_{} + \cdots + \underbrace{|\vec{a}_m|^2}_{}}$$

$$= |\vec{x}|\sqrt{\underbrace{\underbrace{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2}_{} + \underbrace{a_{21}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2}_{} + \cdots + \underbrace{a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + \cdots + a_{mn}^2}_{}}_{\|A\|}}$$

$$= \|A\|\,|\vec{x}|$$

Altså: $|y| \leq \|A\|\,|\vec{x}|$.

Determinanter

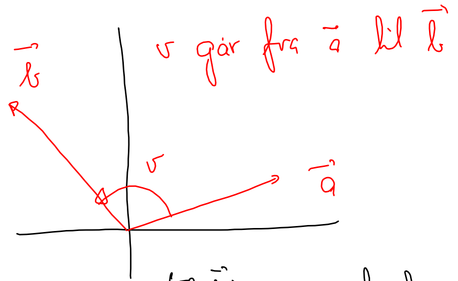
Til enhver $n \times n$-matrise A finnes det et tall $\det(A)$ som kalles <u>determinanten</u> til A. Hvis $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, så er

$$\det(A) = ad - bc$$

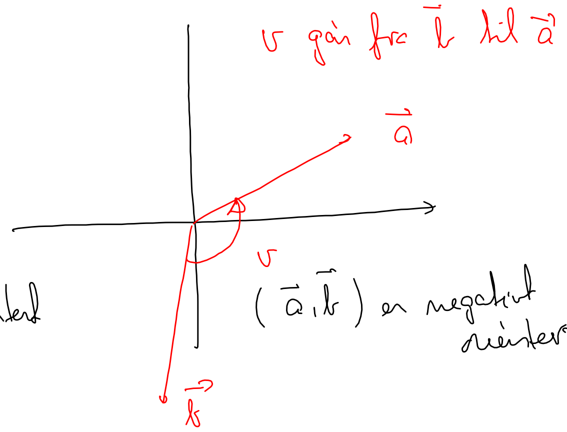
<u>Eksempel</u>. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = 2\cdot(-7) - 4\cdot 3 = -14 - 12 = \underline{-26}$

Hva betyr determinanter geometrisk?

Anta at $(\vec{a}, \vec{b})$ er et <u>ordnet</u> par av vektorer: $\vec{a}$ er førstevektor, $\vec{b}$ er annenvektor.

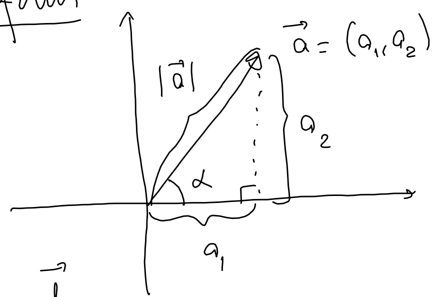


$(\vec{a}, \vec{b})$ er positivt orientert



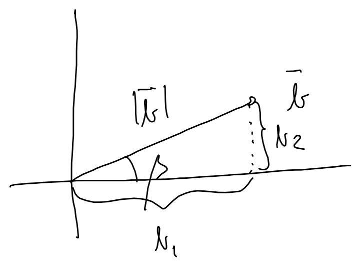
$(\vec{a}, \vec{b})$ er negativt orientert.

<u>Polarform</u>.

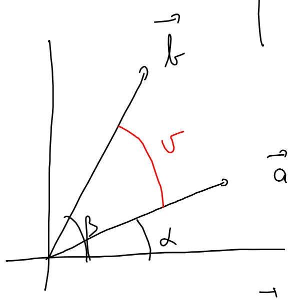


$a_1 = |\vec{a}| \cos\alpha$

$a_2 = |\vec{a}| \sin\alpha$



$b_1 = |\vec{b}| \cos\beta$, $b_2 = |\vec{b}| \sin\beta$



Positivt orientert:

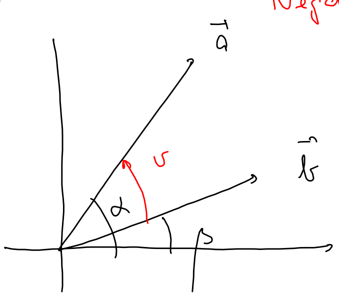
$$\boxed{v = \beta - \alpha}$$

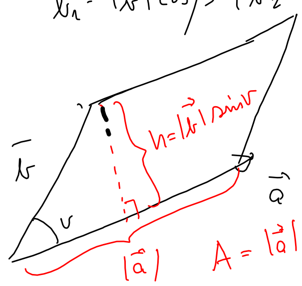
$\Rightarrow \beta = \alpha + v$

Negativ orientert

$v = \alpha - \beta$

$$\boxed{\beta - \alpha = -v}$$



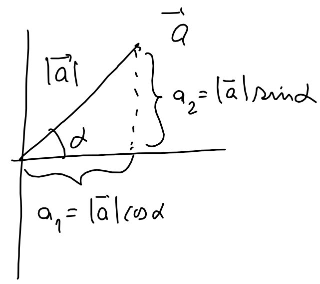


$A = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin v$

Gitt et vektorpar $\vec{a}, \vec{b}$, lar vi

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

På polarform



$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \det\begin{pmatrix} |\vec{a}|\cos\alpha & |\vec{a}|\sin\alpha \\ |\vec{b}|\cos\beta & |\vec{b}|\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha\sin\beta - |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha\cos\beta$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}|(\underbrace{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}_{\sin(\beta-\alpha)}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\overbrace{\beta-\alpha}^{\pm v})$$

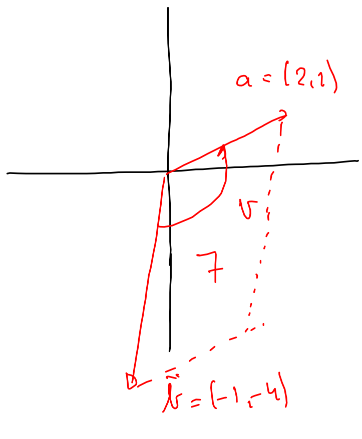
$$= \underbrace{\pm|\vec{a}||\vec{b}|\sin v}_{\text{Areal til parallellogram}}$$

<u>Setning:</u> $\det(\vec{a},\vec{b})$ er positiv dersom $(\vec{a},\vec{b})$ har positiv orientering og negativ dersom paret har negativ orientering. Tallverdien til $\det(\vec{a},\vec{b})$ er lik arealet til parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

<u>Eksempel:</u> La $\vec{a} = (2,1)$ og $\vec{b} = (-1,-4)$. Da er

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4) - 1\cdot(-1) = -8+1 = \underline{\underline{-7}}$$

Vi ser at paret $(\vec{a},\vec{b})$ er negativt orientert og at parallellogrammet utspent av de to vektorene har areal $\underline{7}$



negativ orientering

3x3- determinanter

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \ldots\ldots$$

Sammenheng med kryssprodukt:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

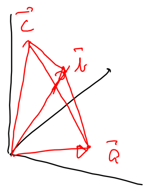
$$= \vec{a}\times\vec{b}$$

Dessuten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})} \leftarrow$$

Setning: Volumet til parallellepipedet utspent av $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ er lik $|\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$. Volumet til pyramiden utspent av $\vec{a},\vec{b}$ og $\vec{c}$ er $\frac{1}{6}|\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$.

Eksempel: Finn volumet til pyramiden utspent av $\vec{a}=(1,0,-1)$, $\vec{b}=(2,-1,3)$, $\vec{c}=(-1,0,4)$.



Vi har

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

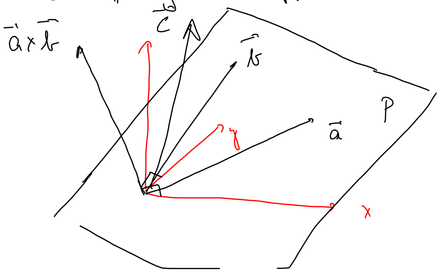
$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ har negativ orientert

$$= (-1)\cdot 4 - 3\cdot 0 - 0 - (2\cdot 0 - (-1)(-1)) = -4 + 1 = \underline{\underline{-3}}$$

$$V = \frac{1}{6}|\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = \frac{1}{6}|-3| = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Hva betyr denne.

Orientering av trippelet $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:



Dersom $\vec{c}$ ligger på samme side av planet til $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som $\vec{a}\times\vec{b}$, så er $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ positivt orientert.