Funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$

"Vanlige" funksjoner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $A\subseteq\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$

$$f(x) = y$$

tall inn   tall ut

De nye funksjonene $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $A\subset\mathbb{R}^n$: $\vec{F}:A\to\mathbb{R}^m$

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{y}$$

$x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$

vektor inn   vektor ut

Definisjon: Anta at A er en delmengde av $\mathbb{R}^n$. En funksjon $\vec{F}: A\to\mathbb{R}^m$ er en regel som til hver $\vec{x}\in A$ gir en $\vec{y}=\vec{F}(\vec{x})$ i $\mathbb{R}^m$.

Eksempel: (i) $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2)$

$$\vec{F}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} x_1x_3-\sin x_2 \\ e^{x_1}(x_2+x_1x_3^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

(ii) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ skalarfelt (verdier i $\mathbb{R}$)

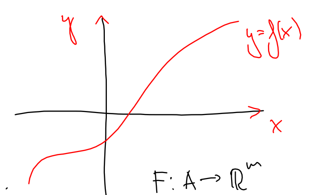
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^4\,e^{x_2x_3-x_1}\cos x_4$$

Dersom $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, så

$$\vec{F}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{pmatrix} F_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ F_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \vdots \\ F_m(x_1,x_2,\dots,x_n)\end{pmatrix}$$

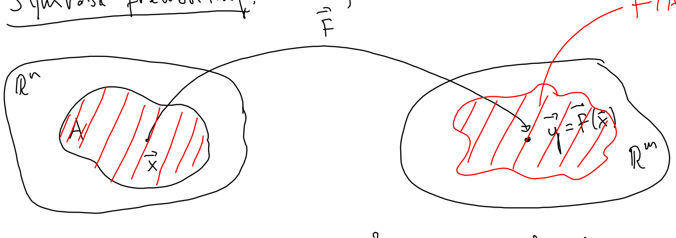
Vektorfunksjoner er bygget opp av skalarfelt. Vi kaller $F_1,F_2,\dots,F_m$ for komponentene til $\vec{F}$.

Grafisk fremstilling:

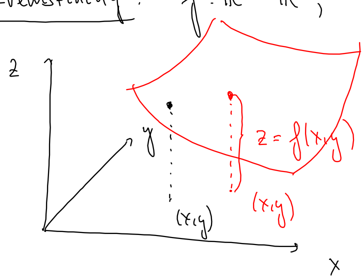


Symbolsk fremstilling: $F: A\to\mathbb{R}^m$

$\vec{F}(A)=\{\vec{F}(\vec{x}) : \vec{x}\in A\}$



Konkret fremstilling: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=z$



Praktiske eksempler

Areal til et rektangel: $A(g,h) = gh \quad A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Temperaturmålinger: $T(x,y,z,t)$ = temperaturen i punktet (x,y,z) ved tiden t

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

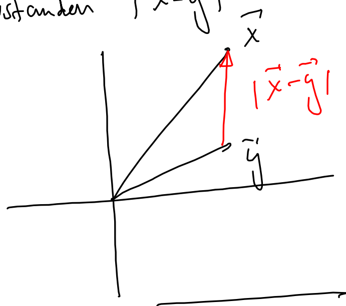
Vindmålinger: $\vec{V}(x,y,z,t)$ = vinden (styrke og retning) i punktet (x,y,z) ved tiden t.

$\vec{V}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

Matriser: A $m \times n$-matrise: $\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Kontinuitet

Avstand mellom punkter: $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$: Avstanden $|\vec{x}-\vec{y}|$

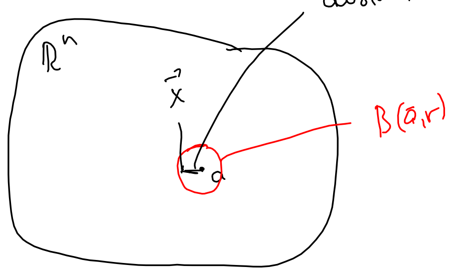


Kulen: $B(\vec{a},r)$ = kulen om punktet $\vec{a}$ med radius r

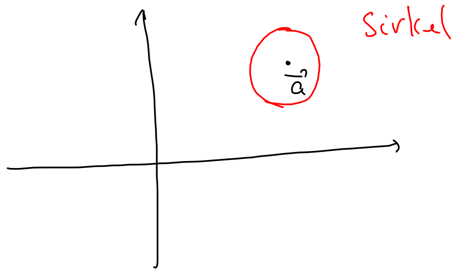
$= \{x\in\mathbb{R}^n : |x-a|<r\}$

avstand mindre enn r.

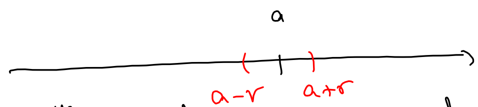
$$|x-a| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2}$$



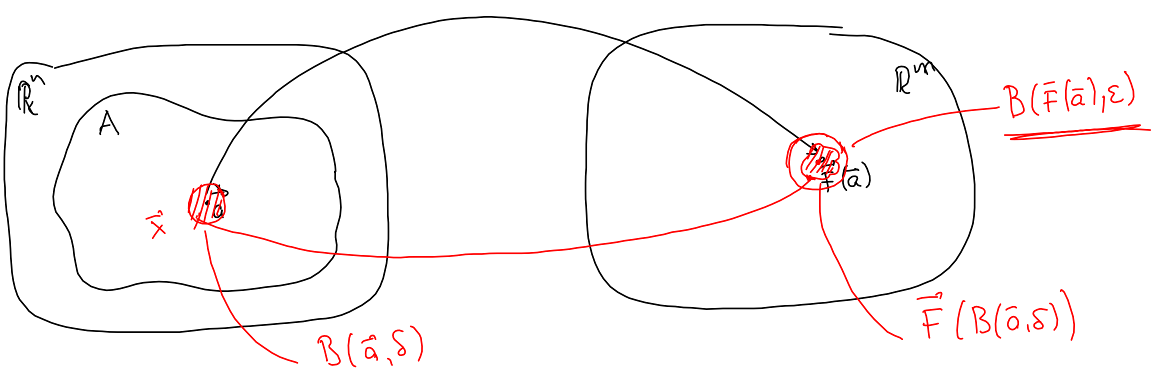
$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}$



Definisjon: Anta at $A\subset\mathbb{R}^n$ og at $\vec{F}: A\to\mathbb{R}^m$ er en funksjon. Vi sier at $\vec{F}$ er kontinuerlig i et punkt $\vec{a}\in A$ dersom det for hver $\varepsilon>0$ finnes en $\delta>0$ slik når $\vec{x}\in A$ og $|\vec{x}-\vec{a}|<\delta$, så er $|\vec{F}(\vec{x})-\vec{F}(\vec{a})|<\varepsilon$.

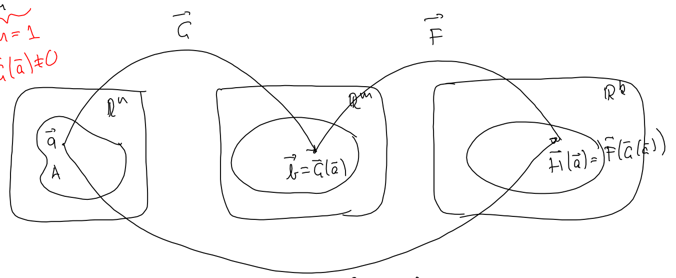


Teorem: Anta at $\vec F, \vec G : A \to \mathbb{R}^m$ ligger er kontinuerlige i $\vec a$. Da er også funksjonene $\vec F + \vec G$, $\vec F - \vec G$, $\vec F \cdot \vec G$ kontinuerlige i $\vec a$. Det samme er $\vec F \times \vec G$ og $\frac{\vec F}{\vec G}$ dersom disse funksjonene er definert i $\vec a$.

$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^3$

$m = 1$

$\vec G(\vec a) \neq 0$



$\vec H(\vec x) = \vec F(\vec G(\vec x))$

Teorem: Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$, at $\vec G : A \to \mathbb{R}^m$ og $\vec F : \vec G(A) \to \mathbb{R}^k$ er funksjoner. Den sammensatte funksjonen $\vec H(\vec x) = \vec F(\vec G(\vec x))$ er kontinuerlig i $\vec a$ dersom $\vec G$ er kontinuerlig i $\vec a$ og $\vec F$ er kontinuerlig i $\vec b = \vec G(\vec a)$.

Et resultat som er nyttig praksis:

Setning: En funksjon $\vec F : A \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlig i et punkt $\vec a$ hvis og bare hvis alle komponentene $F_1, F_2, \dots, F_m$ er kontinuerlige i $\vec a$.

Eks: $\vec F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - 3yz\cos x \\ y^4 - e^{x-z} \end{pmatrix}$$ nok å sjekke at $\left.\begin{matrix} x^2 - 3yz\cos x \\ \text{og} \\ y^4 - e^{x-z} \end{matrix}\right\}$ er kont.

Hvordan gjør vi dette?

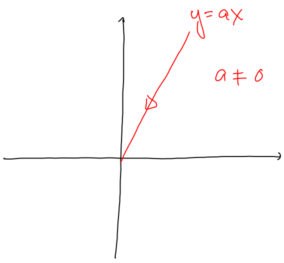
$$\underbrace{\cos x}_{\text{kont}} \to \overbrace{3\,y\,z\,\cos x}^{\text{Produkt}}$$

kont kont kont kont

$$\overbrace{\underbrace{x^2}_{\text{kont}} - \underbrace{3yz\cos x}_{\text{kont}}}^{\text{diff}} \leftarrow \text{kont}$$

$$\underbrace{x^2 = x \cdot x}_{\text{Produkt}}$$

Forenamend: "Funksjonen $\vec F(\vec x)$ er kontinuerlig i $\vec a$ dersom $\vec F(\vec x)$ nærmer seg $\vec F(\vec a)$ når $\vec x$ går mot $\vec a$" (Riktig dersom man tolker "nærmer seg" riktig).



Eksempel:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{når } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{når } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

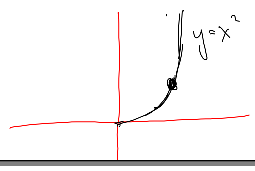
Spørsmål: Er denne funksjonen kontinuerlig i $(0,0)$

Nærmer meg origo langs linjen $y = ax$:

$$f(x, ax) = \frac{x^2 a x}{x^4 + a^2 x^2} = \frac{ax}{x^2 + a^2} \longrightarrow \frac{0}{a^2} = \underline{\underline{0}}$$

Når (x,y) nærmer seg $(0,0)$ langs en rett linje, så $f(x,y) \to f(0,0)$

La oss isteden nærme oss $(0,0)$ langs en parabel: $y = x^2$

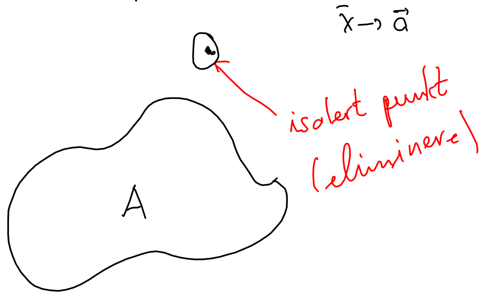


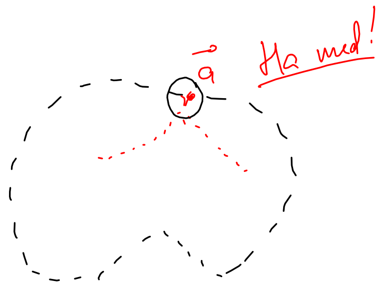
$$f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$f(x, x^2) \not\to f(0,0)$$

Grenseverdier:

Hva betyr det at $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{b}$?





Definisjon: Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$. Et punkt $\vec{a}$ kalles et opphopnings-punkt for A dersom enhver kule $B(\vec{a}, r)$ om $\vec{a}$ inneholder uendelig mange punkter fra A.

Definisjon: Anta at A er en delmengde av $\mathbb{R}^n$ og at $\vec{F}$ er en funksjon $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$. Dersom $\vec{a}$ er et opphopningspunkt for A, så definerer vi at $\vec{b} = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x})$ dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $\vec{x} \in A$ og $0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta$, så er $|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{b}| < \varepsilon$.