I morgen: forelesning

torsdag: plenumsregning

Deriverbare funksjoner

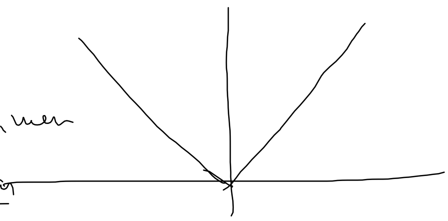
Observasjon: Hvis f er deriverbar i a, så er f kontinuerlig i a.

Hvorfor: Hvis $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ eksisterer, så må $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ og dermed er f kontinuerlig i a.

OBS: f kan godt være kontinuerlig i et punkt uten å være deriverbar der.

$f(x) = |x|$

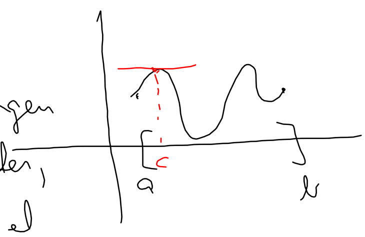
er kont. i 0, men ikke deriverbar



Middelverdisetning

Setning: Hvis en funksjon $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ har et maks. eller min. punkt i et punkt c hvor den er deriverbar, så $f'(c) = 0$.

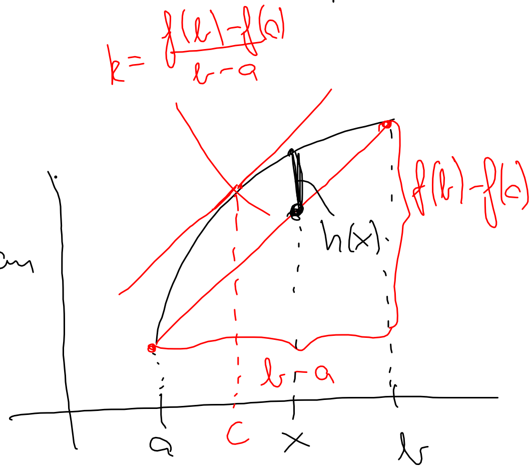
Rolles teorem: Hvis $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon som er deriverbar i alle indre punkter $x \in (a,b)$ og $f(a) = f(b)$, så finnes det en $c \in (a,b)$ slik at $f'(c) = 0$.



Bevisskisse: Ifølge ekstremalverdisetningen har f minimal- og maksimalpunkter, og minst ett av disse må være et indre punkt c. I dette punktet er $f'(c) = 0$ ifølge setningen ovenfor.

Middelverdisetningen (Sekantsetningen): Hvis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon som er deriverbar i alle indre punkter $x\in(a,b)$, så finnes det et punkt $c\in(a,b)$ der

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Bevis: Vi innfører en hjelpefunksjon

$$h(x)=f(x)-\Big(\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)}\Big)$$

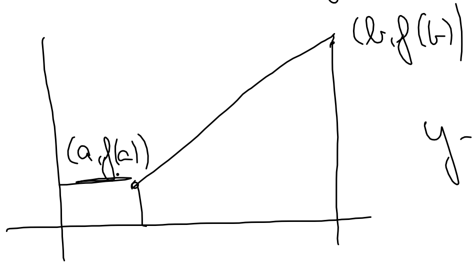
og ser at $h(a)=h(b)=0$. Ifølge Rolles teorem finnes det et punkt $c\in(a,b)$ der $h'(c)=0$. Siden

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$ så betyr dette at

$$0=h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ dvs. } f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Det finnes et punkt c der tangenten er parallell med sekanten

Ekstraoppgave: Sekantligningen



$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

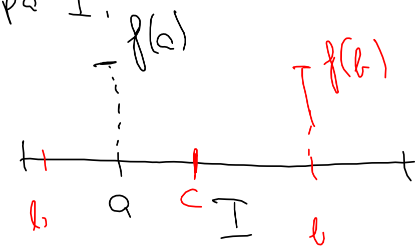
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-b=k(x-a)$$

Eksempel: Den deriverte til en konstantfunksjon $f(x) = c$, er null. Finnes det noen andre funksjoner som har derivert lik 0 i alle punkter?

Setning: Anta at $f'(x) = 0$ for alle indre punkter x i intervallet I. Da er f konstant på I.

Bevis: Velg et punkt $a \in I$. For et hvilket som helst annet punkt b er da



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 0$$

Altså er $f(b) = f(a)$. Altså er alle funksjonsverdier lik $f(a)$, og følgelig er funksjonen konstant

Eksempel: Vis at når $x \geq 0$, så er $\ln(1+x) \leq x$.

Vi skal bruke middelverdisetningen på $f(x) = \ln(1+x)$ og punktene $a = 0$, $b = x$. Da har

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) \text{ for en } c \in (0,x).$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

dvs

$$\frac{\ln(1+x) - \overbrace{\ln(1+0)}^{0}}{x-0} = \frac{1}{1+c} < 1$$

Rydder opp:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \quad |\cdot x \quad (\text{husk at } x > 0)$$

gir

$$\ln(1+x) < x$$

L'Hôpitals regel

Problemstillingen: $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad f(x)\to 0,\ \infty \quad g(x)\to 0,\ \infty$ $\quad$ "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$"

L'Hôpitals regel for "$\frac{0}{0}$"-uttrykk: Anta at $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Dersom $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (der L også kan være lik ∞ eller $-\infty$), så er $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Det kan tenkes at $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ikke eksisterer, men at $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ gjør det likevel!

Eksempel: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = \underline{\underline{1}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

L'Hôpitals regel for "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk: Anta at $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ og at $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (der $L=\pm\infty$ er OK). Da er $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Eksempel: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \underset{\to 0}{x}\,\underbrace{\ln|x|}_{\to -\infty} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2}{-\frac{1}{x^2}\cdot x^2}$ $\quad \ln|x| \to -\infty,\ \frac{1}{x}\to\pm\infty$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{x}{-1} = \underline{\underline{0}}$

Dette eksemplet viser at "$0\cdot\infty$" kan omformes til "$\frac{\infty}{\infty}$" eller "$\frac{0}{0}$"-uttrykket. Det finnes også andre slike, f.eks "$\infty-\infty$", "1^∞", "0^0" (såkalte ubestemte uttrykk).

Eksempel: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x^2\underbrace{\cos\tfrac{1}{x}}_{\to 1}\right)$ "$\infty-\infty$" $\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\underset{\to\infty}{x^2}\,\underset{\to 0}{\left(1-\cos\tfrac{1}{x}\right)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\left(+\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)}{+2\frac{1}{\cancel{x^3}}}$

"$\frac{0}{0}$"

$\boxed{\frac{1}{x^2} = x^{-2} \qquad (x^{-2})' = -2x^{-3}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = \frac{1}{2}$

Eksempel: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{2}{x}\right)}_{1}^{x}$ $\quad x\to\infty \quad$ "1^∞"

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\left[e^{\ln(1+\frac{2}{x})}\right]^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{2}{x})}$ $\quad$? $\quad$ "$\frac{0}{0}$"

Hjelperegning: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\underset{\infty}{x}\,\underset{0}{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}$

$\displaystyle\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\left(+\frac{2}{\cancel{x^2}}\right)}{+\frac{1}{\cancel{x^2}}} = \underline{\underline{2}}$

Tilbake til oppgaven. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\overbrace{x\ln(1+\frac{2}{x})}^{2}} = \underline{\underline{e^2}}$