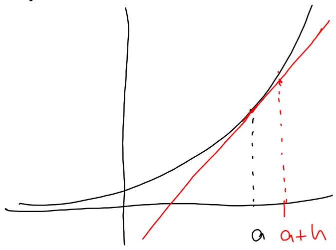
Neste uke: Onsdag forelesning
Torsdag plenumsregning

Tordentale:

Retningsderivert

Skalarfelt: $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

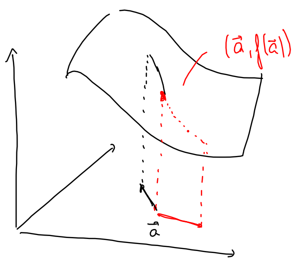
Hvis $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



$f'(a)$ stigningstallet til grafen i punktet a.

Endring i funksjonsverdi $\approx f'(a)h$

Hvis $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$



Stigningstallet avhenger av retningen vi går i.

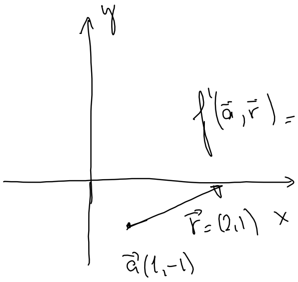
Definisjon: Anta at $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ er en funksjon av flere variable. Den retningsderiverte $f'(\vec{a};\vec{r})$ i punktet $\vec{a}$ og retningen $\vec{r}$ er definert ved

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

forutsatt at grenseverdien eksisterer.

Tolkning: Stigningstall til grafen i $\vec{r}$'s retning når vi bruker $|\vec{r}|$ som måleenhet.

Eksempel: La $f(x,y) = x^2y$, $\vec{a} = (1,-1)$, $\vec{r} = (2,1)$



$$\vec{a} + h\vec{r} = (1,-1) + h(2,1) = (\underbrace{1+2h}_{x}, \underbrace{-1+h}_{y})$$

$$f'(\vec{a},\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+2h)^2(-1+h) - 1^2(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+4h+4h^2)(-1+h)+1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{-1} + h - 4h + \cancel{4h^2} - \cancel{4h^2} + 4h^3 \cancel{+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h + 4h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(-3+4h^2) = \underline{\underline{-3}}$$

Partiell deriverte

Enhetsvektorer: $\vec{e}_i = (0,..,0,1,0\ldots 0)$: "i-te enhetsvektor"

↑ i-te komponent

Den retningsderiverte: $f'(\vec{a},\vec{e}_i)$ kalles den i-te **partiellderiverte**

og betegnes med $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = f'(\vec{a};\vec{e}_i)$

Vi har

$(0,..,0,h,0,..,0)$ ↑ i-te komponent

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = f'(\vec{a},\vec{e}_i) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,a_2,..,a_i+h,..,a_n) - f(a_1,a_2,..,a_i,..,a_n)}{h} =$$

= derivasjon m.h.p. x_i mens alle de andre variablene er konstante.

Eksempel: Finn de partiellderiverte til $f(x,y,z) = y^2 e^{x^2+2z}$

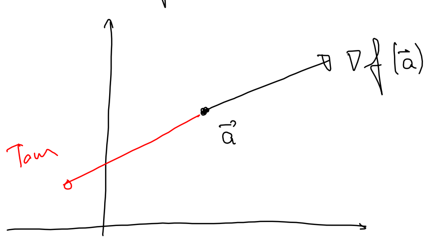
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^{x^2+2z} \cdot 2x = 2xy^2 e^{x^2+2z}$$

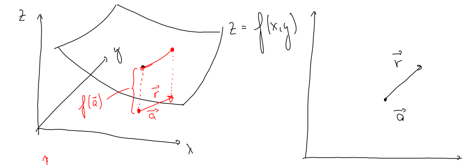
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y e^{x^2+2z}$$

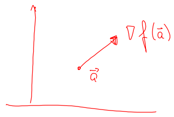
$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 e^{x^2+2z} \cdot 2 = 2y^2 e^{x^2+2z}$$

En funksjon $f(x_1,x_2,..,x_n)$ av n variable har n partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2},.., \frac{\partial f}{\partial x_n}$. **Gradienten** til f i punktet $\vec{a}$ er definert ved

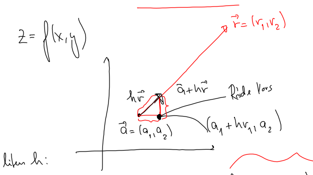
$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}),.., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right) \leftarrow \text{radvektor}$$







$f(\vec{a};\vec{r})$



$$f'(\vec{a},\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

$$\approx \frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

når h er liten.

For liten h:

$$f'(\vec{a},\vec{r}) \approx \frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h} = \frac{f(a_1+hr_1, a_2) - f(a_1,a_2) + f(a_1+hr_1, a_2+hr_2) - f(a_1+hr_1, a_2)}{h}$$

$$\approx \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})\cancel{h}r_1}{\cancel{h}} + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})\cancel{h}r_2}{\cancel{h}}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})r_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})r_2 = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$$

Denne sammenhengen

$$f'(\vec{a},\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$$

gjelder for alle "snille" funksjoner, dvs for alle "deriverbare" funksjoner

Hva er dette?

Motivasjon: f er deriverbar dersom

$\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$ er en god tilnærming til $f(\vec{a}+\vec{r}) - f(\vec{a})$ når $\vec{r}$ er liten.

Definisjon: Vi sier at f er deriverbar i $\vec{a}$ dersom funksjonen

$$\sigma(\vec{r}) = f(\vec{a}+\vec{r}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

blir liten sammenlignet med $|\vec{r}|$ når den siste blir liten, dvs

$$\frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}|} \to 0 \quad \text{når } |\vec{r}| \to 0.$$

Setning: Anta at f er deriverbar i $\vec{a}$. Da er

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$$

Bevisskisse: $f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$

(Vi har $\sigma(h\vec{r}) = f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})\cdot(h\vec{r})$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\nabla f(\vec{a})(h\vec{r}) + \sigma(h\vec{r})}{h} = \lim_{h\to 0} \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} + \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sigma(h\vec{r})}{h|\vec{r}|}\right)|\vec{r}|$$

$$= \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} + 0 = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

Setning: Dersom alle de partiellderiverte til f er definert i en omegn om $\vec{a}$ og kontinuerlige i $\vec{a}$, så er f deriverbar i $\vec{a}$. (Kortversjonen: Er alle partiellderiverte kontinuerlige, så er f deriverbar)

Eksempel: La $f(x,y) = 3x^2y + y^2$

Finn $f'(\vec{a};\vec{r})$ når $\vec{a} = (2,-1)$, $\vec{r} = (3,-2)$

Idé: $f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$

Lov!

Vi har
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x^2 + 2y \end{aligned}\right\} \text{kontinuerlig, så } f \text{ er deriverbar}$$

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})\right) = \left(6\cdot 2\cdot(-1), 3\cdot 2^2 + 2(-1)\right)$$

$$= (-12, 10)$$

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} = (-12,10)\cdot(3,-2) = -36-20 = \underline{\underline{-56}}$$

nov 18-13:18