Komplekse tall

$z = a + ib \quad , a, b \in \mathbb{R} \; , \; i^2 = -1$

Konjugasjon: $z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$ ("z konjugert")

Regneregler for konjugasjon:

(i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(ii) $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$

(iii) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

(iv) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

Bevis: (iii) $z = a + ib$, $w = c + id$

$$\overline{zw} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{ac + iad + ibc + i^2bd}$$

$$= \overline{\underbrace{(ac-bd)}_{\text{realdel}} + i\underbrace{(ad+bc)}_{\text{imaginærdel}}}$$

$$= (ac-bd) - i(ad+bc)$$

$$\bar{z}\,\bar{w} = \overline{(a+ib)} \cdot \overline{(c+id)} = (a-ib)(c-id)$$

$$= ac - iad - ibc + i^2bd =$$

$$= (ac-bd) - i(ad+bc)$$

HURRA! $\square$

Altså $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Løsninger:

$$4iz - 7 = 2z - 3i$$

$$-2z + 4iz = 7 - 3i$$

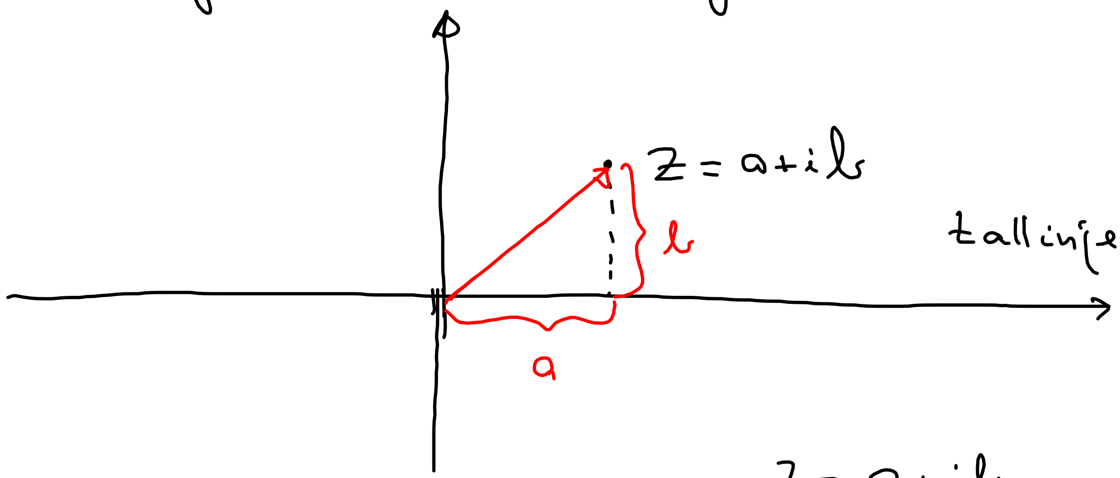
$$z(-2+4i) = 7 - 3i \quad \Big| : (-2+4i)$$

$$z = \frac{7-3i}{-2+4i} = \frac{(7-3i)}{(-2+4i)}\frac{(-2-4i)}{(-2-4i)}$$

$$= \frac{-14 - 28i + 6i \overset{-12}{+12i^2}}{(-2)^2 - 4^2 \underset{-1}{i^2}} = \frac{-26-22i}{20}$$

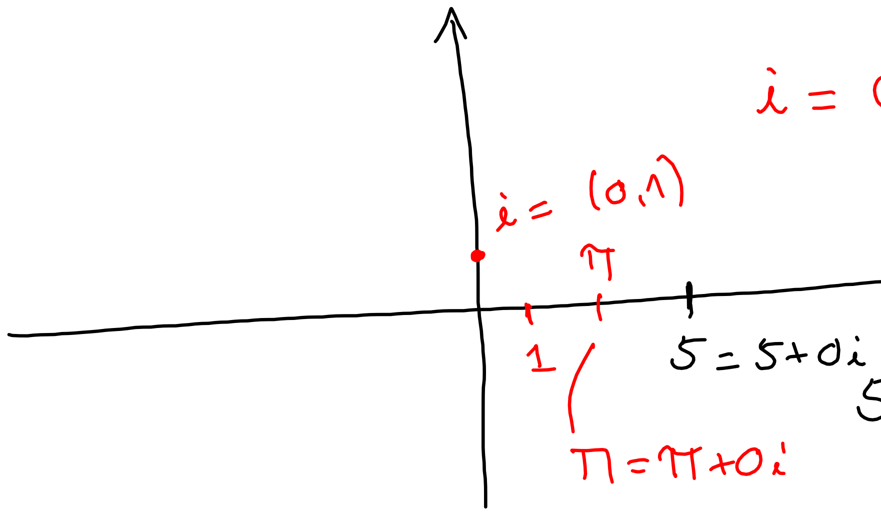
$$= \frac{-13-11i}{10} = -\frac{13}{10} - \frac{11}{10}i$$

Geometrisk tolkning



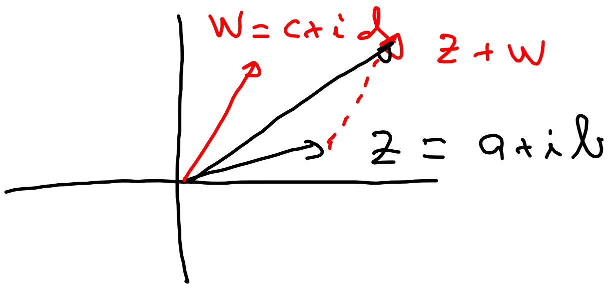
$z = a + ib$

$i = 0 + 1i$



$5 = 5 + 0i$

Addisjon:

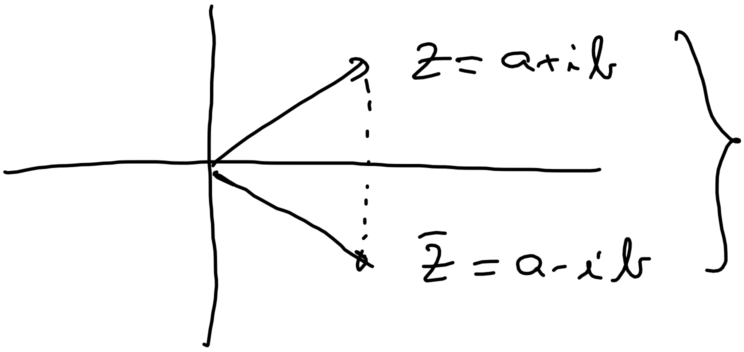


$$z + w = (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

Addisjon og subtraksjon av komplekse tall er "det samme som" vektoraddisjon og -subtraksjon

aug 20-10:40

Konjugasjon: $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$



Speiling om x-aksen

Hva med multiplikasjon og divisjon?

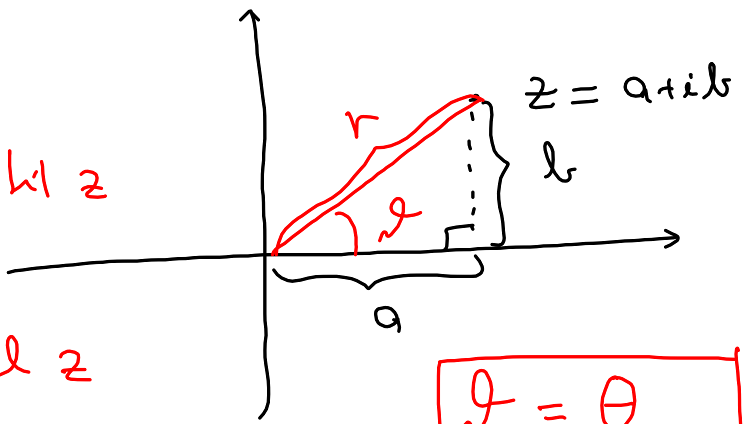
Har de en geometrisk tolkning

Forberedelser:

Polarkoordinatene til z

r = modulus til z

ϑ = argumentet til z



$\vartheta = \theta$

theta

(a,b er kartesiske koordinater)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\vartheta = \frac{a}{r}, \quad \sin\vartheta = \frac{b}{r}$$

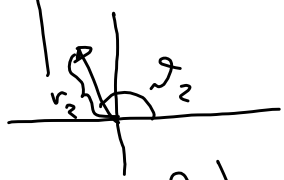
Motsatt vi: $a = r\cos\vartheta$, $b = r\sin\vartheta$

$$z = a + ib = \underbrace{r\cos\vartheta}_{a} + i\,\underbrace{r\sin\vartheta}_{b}$$ på polarform

Minner om:

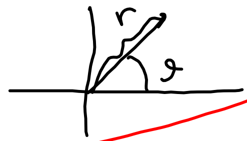
$$\cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u \sin v$$
$$\sin(u+v) = \cos u \sin v + \sin u \cos v$$

$$z_1 = r_1\cos\vartheta_1 + i\, r_1 \sin\vartheta_1$$
$$z_2 = r_2\cos\vartheta_2 + i\, r_2 \sin\vartheta_2$$



$$z_1 z_2 = (r_1\cos\vartheta_1 + i r_1 \sin\vartheta_1)(r_2\cos\vartheta_2 + i r_2\sin\vartheta_2)$$
$$= r_1\cos\vartheta_1 r_2\cos\vartheta_2 + i\, r_1\cos\vartheta_1 r_2 \sin\vartheta_2$$
$$+ i r_1 \sin\vartheta_1 r_2\cos\vartheta_2 + i^2 r_1\sin\vartheta_1 r_2 \sin\vartheta_2$$
$$= r_1 r_2(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2)$$
$$+ i r_1 r_2 (\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2)$$
$$= r_1 r_2 \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\, r_1 r_2 \sin(\vartheta_1+\vartheta_2)$$

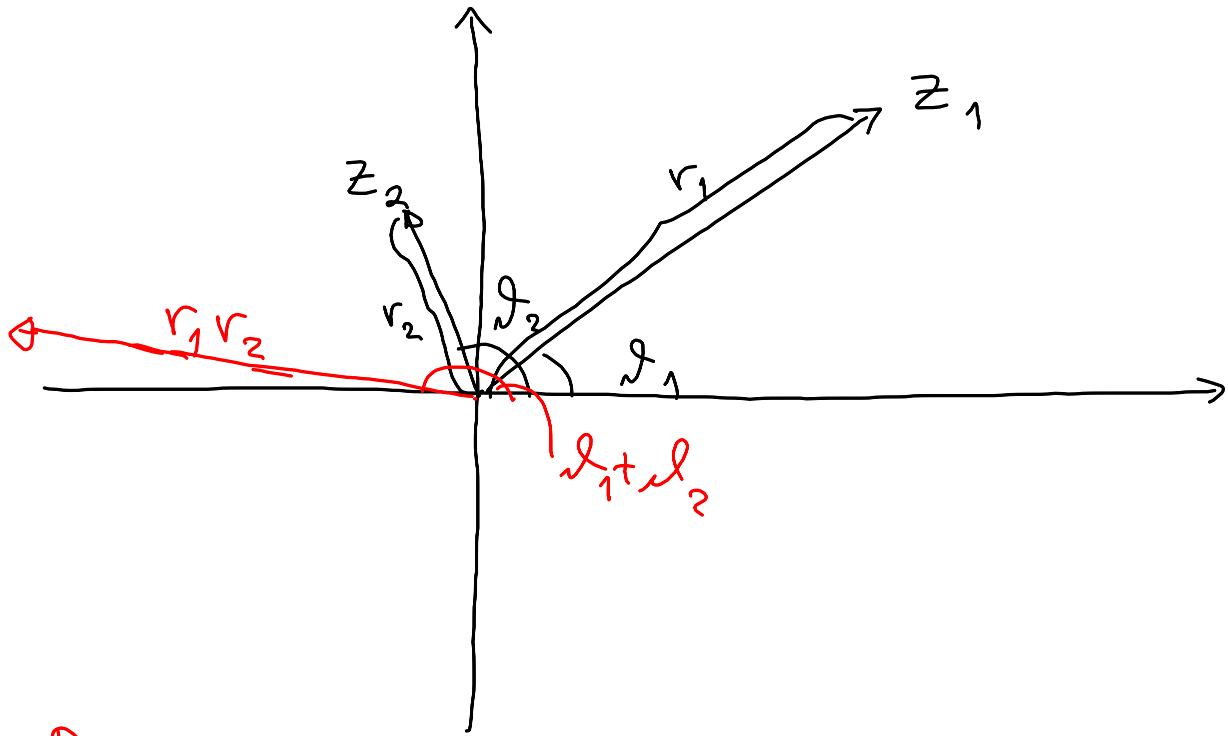
(Husk $r\cos\vartheta + i r \sin\vartheta$



)

et komplekst tall med modulus $r_1 r_2$ og argument $\vartheta_1+\vartheta_2$

Regel: Når vi multipliserer to komplekse tall, multipliserer vi modulusene og adderer vinklene.



Divisjon

$$z_1 = r_1 \cos\vartheta_1 + i r_1 \sin\vartheta_1$$

$$z_2 = r_2 \cos\vartheta_2 + i r_2 \sin\vartheta_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i \frac{r_1}{r_2} \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

Vi dividerer modulusene og subtraherer argumentene.

aug 20-11:43