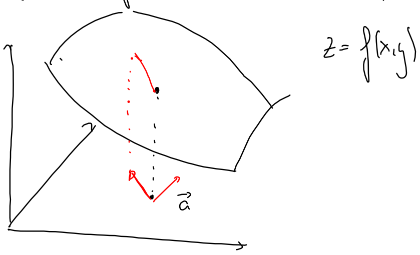
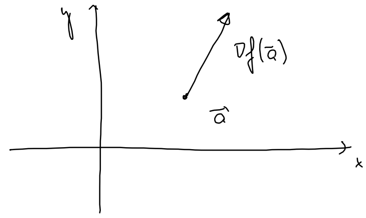
Partiellderiverte

Husk: Hvis f er en deriverbar funksjon, så er $f'(\vec{a},\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$





Setning: Anta $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er deriverbar. Gradienten $\nabla f(\vec{a})$ peker da i den retningen hvor funksjonen stiger raskest ut fra $\vec{a}$, og stigningstallet i denne retningen er $|\nabla f(\vec{a})|$

Bevis: Vi må finne ut for hvilken enhetsvektor $\vec{u}$ den retningsderiverte $f'(\vec{a},\vec{u})$ er størst.

$$f'(\vec{a},\vec{u}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{u} \underset{\substack{= \\ \text{Hvis } \nabla f(\vec{a}) \parallel \vec{u}}}{\overset{\text{Schwarz ulikhet}}{\le}} |\nabla f(\vec{a})||\vec{u}| = |\nabla f(\vec{a})|$$

Vi ser at $f'(\vec{a},\vec{u}) \le |\nabla f(\vec{a})|$ med likhet dersom $\vec{u} \parallel \nabla f(\vec{a})$.

Eksempel: La $f(x,y,z) = x^2 z e^{x^2+y}$. I hvilken retning vokser f raskest ut fra punktet $\vec{a} = (1,1,2)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xze^{x^2+y} + x^2 z e^{x^2+y}\cdot 2x = 2xze^{x^2+y}(1+x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) = 2\cdot 1\cdot 2\cdot e^{1^2+1}(1+1^2) = 8e^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z e^{x^2+y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) = 1^2\cdot 2e^{1^2+1} = 2e^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 e^{x^2+y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) = 1^2\cdot e^{1^2+1} = e^2$$

Dermed er $\nabla f(\vec{a}) = (8e^2, 2e^2, e^2) = e^2(8,2,1)$

Tenkt eksamensoppgave: I hvilken retning vokser ....

a) $(0,0,1)$
b) $\sqrt{2}$
c) $(3,-1,2)$
d) $(8,2,1)$ ←
e) $(e^{-i\sqrt{2}}, 13, \pi^{3/2})$

<u>Setning</u>: Dersom f er <u>deriverbar</u> i et punkt $\vec{a}$, så er den også kontinuerlig.

<u>Bevisskisse</u>:

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} f(\vec{a}+\vec{r}) = \lim_{\vec{r}\to\vec{0}}\left[f(\vec{a}) + \underbrace{\nabla f(\vec{a})\vec{r}}_{\downarrow \atop 0} + \underset{\vec{0}}{\underset{\downarrow}{\sigma(\vec{r})}}\right]$$

$$= \underline{\underline{f(\vec{a})}}$$

<u>Advarsel</u>: Det kan tenkes at alle partiellderiverte i $\vec{a}$ eksisterer, men at funksjonen allikevel ikke er kontinuerlig der.

Høyere ordens partiellderivert

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f', f'', f''', f^{(4)}, \ldots\ldots$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad f(x,y)$: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}\right\}\ \text{annenordens partiellderivert}$$

Eksempel: $f(x,y,z) = \cos(y+z^2)e^{-x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\cos(y+z^2)e^{-x}\right) = \sin(y+z^2)\cdot 2z e^{-x}$$
$$= 2z\sin(y+z^2)e^{-x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\sin(y+z^2)\cdot 2z e^{-x}\right)$$
$$= -\sin(y+z^2)\cdot 2z\left(e^{-x}(-1)\right) = 2z\sin(y+z^2)e^{-x}$$

Teorem: Anta $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Dersom $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ er kontinuerlige i et område rundt $\bar{a}$, så er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\bar{a})$$

Generelt: $\frac{\partial^n f}{\partial x_n\partial x_{n-1}\cdots\partial x_2\partial x_1}$ = resultatet av å derivere f n ganger — først med hensyn på x_1, så med hensyn på x_2, osv.

Derivasjon av vektorvaluerte funksjoner

$\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: Hvordan deriverer vi dem?

$$\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1,\dots,x_n) \\ F_2(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} \longleftarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \leftarrow \text{matrisestruktur}$$

Jacobi-matrisen:

$$\vec{F}'(\vec{a}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \nabla \vec{F}_1(\vec{a}) \\ \leftarrow \nabla \vec{F}_2(\vec{a}) \\ \\ \leftarrow \nabla F_m(\vec{a}) \end{array}$$

Eksempel: Finn Jacobi-matrisen til

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 y + x \sin z \\ xz \ln(1+x^2) \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} F_1 &= x^2 y + x \sin z \\ F_2 &= xz \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

$$\vec{F}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy + \sin z & x^2 & x\cos z \\ z\ln(1+x^2) + xz\frac{1}{1+x^2}2x & 0 & x\ln(1+x^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2xy + \sin z & x^2 & x\cos z \\ z\ln(1+x^2) + \frac{2x^2 z}{1+x^2} & 0 & x\ln(1+x^2) \end{pmatrix}$$

Observasjon:

$$\vec{F}(\vec{a}+\vec{r})-\vec{F}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{a}+\vec{r})-F_1(\vec{a}) \\ F_2(\vec{a}+\vec{r})-F_2(\vec{a}) \\ \vdots \\ F_m(\vec{a}+\vec{r})-F_m(\vec{a}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \nabla F_1(\vec{a})\cdot\vec{r} \\ \nabla F_2(\vec{a})\cdot\vec{r} \\ \vdots \\ \nabla F_m(\vec{a})\cdot\vec{r} \end{pmatrix} = \vec{F}'(\vec{a})\,\vec{r}$$

For "snille" funksjoner blir $\vec{F}(\vec{a}+\vec{r})-\vec{F}(\vec{a}) \approx \vec{F}'(\vec{a})\vec{r}$ for små $\vec{r}$.

Definisjon: La

$$\vec{\sigma}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{a}+\vec{r})-\vec{F}(\vec{a})-\vec{F}'(\vec{a})\vec{r}$$

Vi sier at $\vec{F}$ er deriverbar i $\vec{a}$ dersom

$$\lim_{\vec{r}\to 0}\frac{|\vec{\sigma}(\vec{r})|}{|\vec{r}|} = 0$$

Setning: $\vec{F}$ er deriverbar i $\vec{a}$ hvis og bare hvis alle komponentene $\vec{F}_i$ er deriverbare i $\vec{a}$. Spesielt betyr dette at hvis alle partiellderiverte $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ eksisterer i et område rundt $\vec{a}$ og er kontinuerlige i $\vec{a}$, så $\vec{F}$ deriverbar.

Hva skal disse matrisene brukes til? → kjerneregel $h(x)=f(g(x))$

$\vec{H}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$ $\quad \vec{H}'(\vec{x}) = \vec{F}'(\vec{G}(\vec{x}))\,\vec{G}'(\vec{x})$ $\quad h'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$