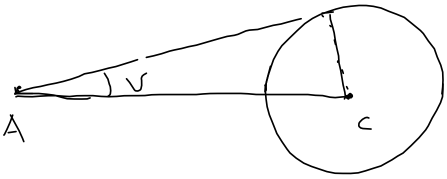
Koblede hastigheter

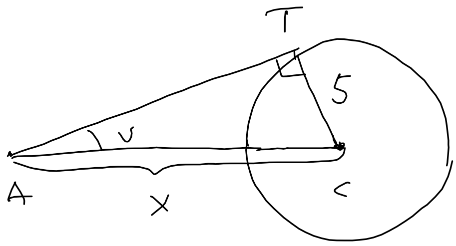
Eksempel (MAT H-11)



radius 5cm

Vet at når $|AC| = 13$ cm, så vokser v med 0.5 radianer/sek.
Hvor raskt sklir klossen i dette øyeblikket?

Generelle situasjon:

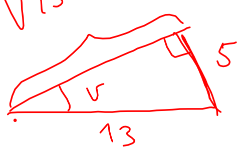


Kjenner: $v' = 0.5$

Vil finne: x'

Trenger ligning som forbinder x og v.

$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$



$$\sin v = \frac{5}{x}$$

Deriverer m.h.p. t: $\cos v \cdot v' = -\frac{5}{x^2} x'$

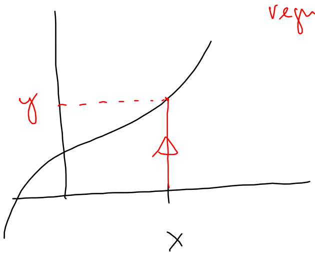
Løser for x': $x' = -\frac{x^2 \cos v \cdot v'}{5}$

Ser på $x = 13$.
Vet at $v' = 0.5$
$\cos v = \frac{12}{13}$

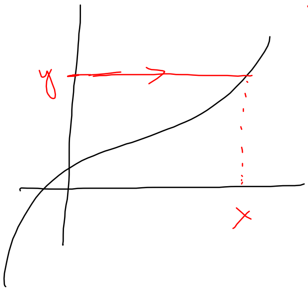
$$= -\frac{13^{\cancel{2}} \cdot \frac{12}{\cancel{13}} \cdot 0.5}{5} = -156 \cdot 0.1 = -15.6 \text{ cm/s.}$$

Omvendte funksjoner

Vanligvis: Starter med x, regner ut $y = f(x)$.



Noen tilfeller: Starter med y, finner x slik at $y = f(x)$.



Eksempel: $f(x) = \ln(x-3)$

Gitt y, vil finne x: $y = \ln(x-3) \overset{\text{Løser for } x}{\Longleftrightarrow} e^y = e^{\ln(x-3)}$

$\Longleftrightarrow e^y = x-3 \Longleftrightarrow \underline{x = e^y + 3} = g(y)$ Omvendt funksjon til f.

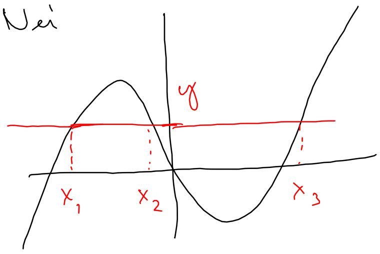
To spørsmål:

(i) Finnes det alltid en slik omvendt funksjon?

(ii) Hva skjer hvis vi ikke greier å løse ligningen $y=f(x)$ for x? Kan vi da få informasjon om den omvendte funksjonen?

Svar på (i): Nei

$y = f(x)$

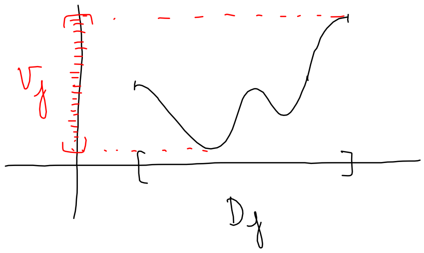


$y = f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$

Finnes ingen omvendt funksjon!

Husk: D_f = definisjonsmengden til f = mengden av de x som $f(x)$ er definert for.

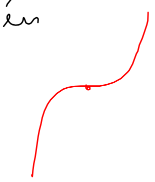
V_f = verdimengden til f = $\{f(x) : x \in D_f\}$

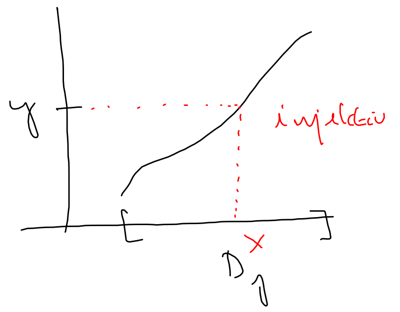


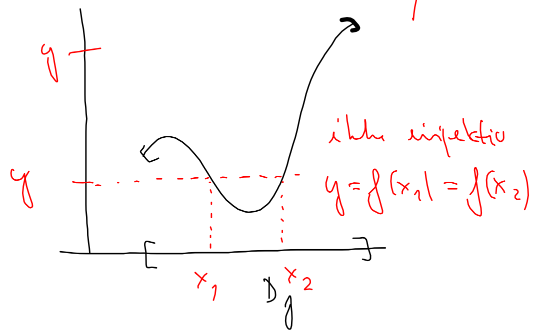
Skriver: $f: D_f \to V_f$

Definisjon: Funksjonen $f: D_f \to V_f$ kalles injektiv dersom det til hver $y \in V_f$ finnes nøyaktig én $x \in D_f$ slik at

$$y = f(x).$$

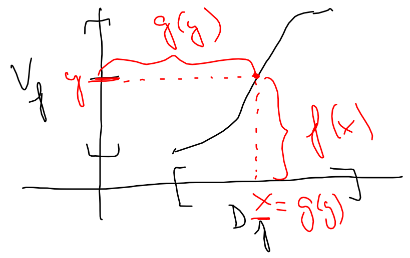




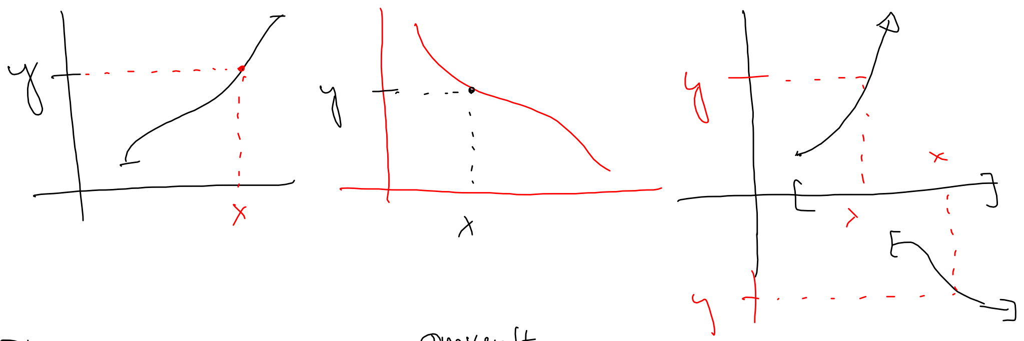


Definisjon: Hvis $f: D_f \to V_f$ er en injektiv funksjon, så er den omvendte funksjonen $g: V_f \to D_f$ definert ved

$$g(y) = x \quad \text{der} \quad f(x) = y.$$



Observasjon: Alle strengt voksende og strengt avtagende funksjoner er injektive



Eksempel: Finn den omvendt funksjonen til $f(x) = x^3 + 4$

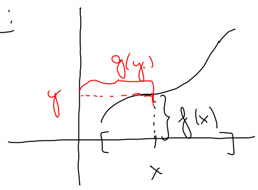
f er strengt voksende og derfor injektiv. Løser for x

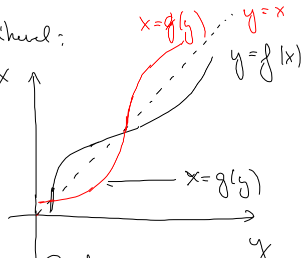
$$y = x^3 + 4 \Rightarrow x^3 = y - 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-4}$$

Spørsmål 2: Dersom f er injektiv, men vi ikke greier å løse ligningen $y=f(x)$ for x – hva gjør vi da?

Vi har en del informasjon likevel:

Grafisk:



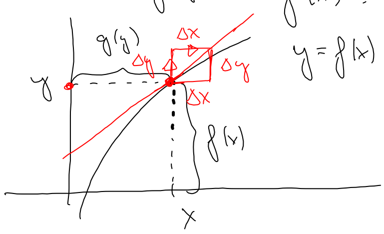


Grafen til $x=g(y)$ fremkommer ved å speile den opprinnelige grafen om linjen $y=x$.

For å slippe å bruke uvante variabelnavn, bruker vi ofte x som navn på grunnleggende variabelen også for omvendte funksjoner.

Setning: Anta at f er en injektiv funksjon som er deriverbar i punktet x med $f'(x) \neq 0$. Da er den omvendte funksjonen g deriverbar i punktet $y=f(x)$ og

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$



$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$g'(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Eksempel: La $f(x) = e^x + x$ ha omvendt funksjon g. Finn den deriverte til g i punktet $y=1$.

Observer at $1 = f(0) = e^0 + 0$. Dermed er

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} \quad (\text{fordi } f(0)=1)$$

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad y=f(x)}$$

Mellomregning: $f'(x) = e^x + 1$, $f'(0) = e^0 + 1 = \underline{2}$

Altså $g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

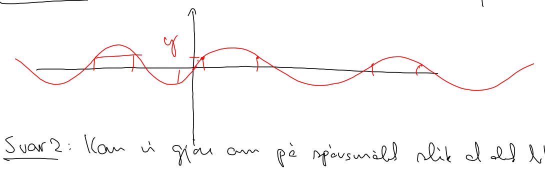
Notasjon: Den omvendte funksjonen til f betegnes ofte med f^{-1}.

ADVARSEL: $\underbrace{f^{-1}(x)}_{\text{omvendt funksjon}} \neq \frac{1}{f(x)} = f(x)^{-1}$

Arcus-funksjoner

Hva er den omvendte funksjonen til $f(x) = \sin x$?

Svar 1: Ha-ha din dust, sinus er ikke injektiv!

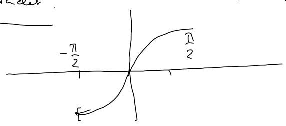


Svar 2: Kan vi gjøre om på spørsmålet slik at det blir fornuftig.

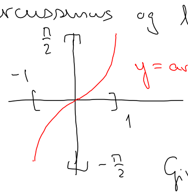
Innskrenker definisjonsområdet:

$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ gitt ved

$f(x) = \sin x$



Den omvendte funksjonen $g: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kalles arcussinus og betegnes ved arcsin og $\sin^{-1}$



Hva med den deriverte?

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{der } y = f(x)$$

Gir

$$g'(y) = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} \qquad y = \sin x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Dvs:

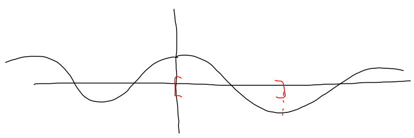
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

Vel om sinus:

$\sin 0 = 0$	$\arcsin 0 = 0$
$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$
$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$
$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$
$\sin \frac{\pi}{2} = 1$	$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

Tilsvarende for cosinus:



$y = \cos x$

$f: [0,\pi] \to [-1,1] \quad f(x) = \cos x$

Den inverse funksjonen til denne kalles arcuscosinus, arccos, $\cos^{-1}$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Arcustangens: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\frac{1}{1-x^2}}\,dx = \arctan x + C$$