Repetisjon

Komplekse tall

$z = a + ib \quad , a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$

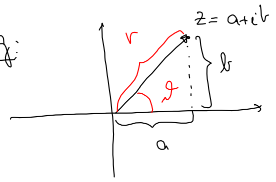
Et trist triks: $\dfrac{2+4i}{1+3i} = \dfrac{(2+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{2-6i+4i\overbrace{-4\cdot 3i^2}^{+12}}{\underbrace{1^2-(3i)^2}_{1^2+3^2}} = \dfrac{14-2i}{10} = \dfrac{14}{10} - \dfrac{2}{10}i = \dfrac{7}{5} - \dfrac{1}{5}i$

Konjugasjon: $z = a + ib \ , \ \bar{z} = a - ib$

Geometrisk tolkning:

r - modulus

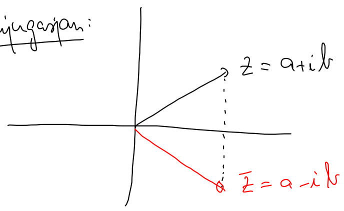
ϑ - argument

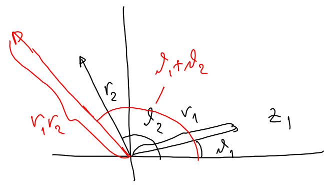


Addisjon: Vektoraddisjon

Multiplikasjon: Multipliserer modulusene og legger sammen argumentene.

Konjugasjon:





n-te potenser og n-te røtter

$z = a + ib = r\cos\vartheta + i\,r\sin\vartheta = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{i\vartheta}$

$z^n = (re^{i\vartheta})^n = r^n e^{in\vartheta} = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$ ← n-te potens av modulus, n ganger argumentet.

Et komplekst tall $z \neq 0$ har alltid n forskjellige n-te røtter:

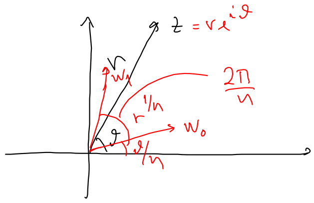
$W_0, W_1, \ldots, W_{n-1}$.

$W_0 = r^{1/n} e^{i\frac{\vartheta}{n}}$

$W_1 = r^{1/n} e^{i\frac{\vartheta+2\pi}{n}}$

$\vdots$

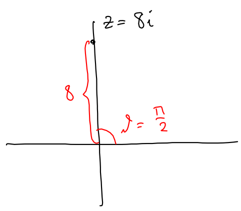
$W_{n-1} = r^{1/n} e^{i\frac{\vartheta+2(n-1)\pi}{n}}$



Eksempel: Finn tredjeröttene til $z = 8i$

$z = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \ , \ r^{1/3} = 8^{1/3} = 2$

$\dfrac{\vartheta}{3} = \dfrac{\frac{\pi}{2}\cdot 2}{3\cdot 2} = \dfrac{\pi}{6}$



$W_0 = r^{1/3} e^{i\frac{\vartheta}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

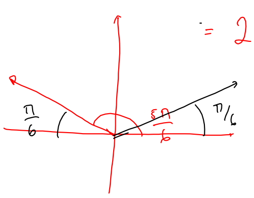
$W_1 = r^{1/3} e^{i\frac{\vartheta+2\pi}{3}} = r^{1/3} e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$

Mellomregning:

$\dfrac{\vartheta+2\pi}{3} = \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)\cdot 2}{3\cdot 2} = \dfrac{\pi+4\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$



$W_2 = \ldots\ldots\ldots = -2i$

Komplekse ligninger

to komplekse kvadratrøttene til b^2-4ac

Annengradsligninger: $az^2+bz+c=0$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

komplekst tall

Algebraens fundamentalteorem: Anta at

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0 \qquad a_n,a_{n-1},\dots,a_0\in\mathbb{C}$$

er et komplekst n-te grads polynom. Da finnes det komplekse tall $r_1,r_2,\dots,r_n$ slik at

$$P(z)=a_n(z-r_1)(z-r_2)\dots(z-r_n)$$

Reelle formen: Dersom $P(z)$ er et reelt n-te gradspolynom, kan det faktoriseres i reelle førstegrads- og annengradsfaktorer:

$$P(z)=a_n(z-r_1)\dots(z-r_j)(z^2+b_1z+c_1)\dots(z^2+b_kz+c_2)$$

Følger

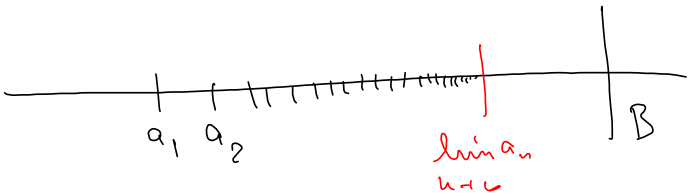
En følge er en uendelig sekvens av tall $a_1, a_2, a_3, \dots$

Notasjon: $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = b$ betyr at

for ethvert $\varepsilon > 0$ finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik $|a_n - b| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.

Setning: Enhver begrenset, monoton følge konvergerer.

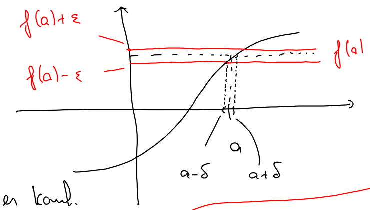


Minner om

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 5}{6}$$

Funksjoner

Kontinuerlig funksjon: f er kontinuerlig i a dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at hvis $x \in D_f$ og $|x-a| < \delta$, så er $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.



Hvordan man viser at funksjoner er kont.

1. Vis at det for enhver $\varepsilon > 0$, finnes en $\delta > 0$ ....

I MAT 1100 stort sett bare når oppgaven ber om det.

2. Den funksjonen er gitt ved en sammensetning av x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x, $|x|$, så er den automatisk kont. der uttrykket er definert.

3. Spesielle punkter, f.eks

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Punkt 2 viser at denne er kontinuerlig for $x \neq 0$

$x=0$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \overset{?}{=} f(0)$

For oss: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1 = f(0)$

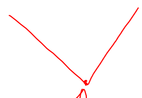
kontinuitet.

Deriverbarhet: f er deriverbar i a dersom

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{eksisterer}$$

deriverbar $\Rightarrow$ kont

kont $\not\Rightarrow$ deriverbar



ingen derivert.

Hvordan deriverer vi:

1. Bruker derivasjonsreglene unntatt i
2. unntakspunkter.

Eksempel: Finn den deriverte til

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln|1-x|}{x} & \text{for } x \neq 0,\ x \neq 1 \\ -1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

for $x \neq 0$, $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1-x}(-1)\cdot x - \ln|1-x|\cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{x-1} - \ln|1-x|}{x^2}$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

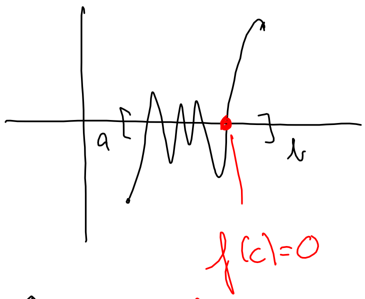
for $x=0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\ln|1-x|}{x}+1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln|1-x|+x}{x^2}$$

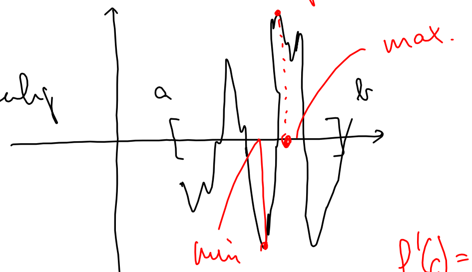
$$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1-x}(-1)+1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x-1}+1}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Tre vakre teoremer

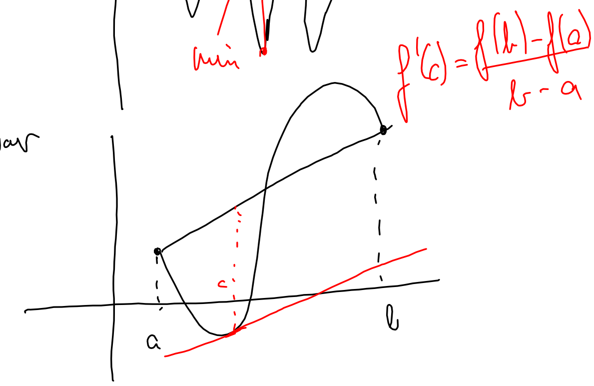
Skjæringssetningen: f kontinuerlig



Ekstremalverdisetningen: f kontinuerlig



Middelverdisetningen: f deriverbar



Grenseverdier

L'Hôpitals regel (motoveimetoden)

Største faktor: (typisk for spesiell interessant) $\lim \frac{x^4+2x^3+7}{3x^4+2x+1} = \lim \frac{x^4(\ldots)}{x^4(\quad)}$

Multiplisere med konjugert (merket tanke) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}}$

L'Hôpital: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}_{\text{forutsatt at dette eksisterer.}}$ forutsatt at $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$

Omforming: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞ osv.

$\lim_{x\to a} \underbrace{f(x)}_{e^{\ln f(x)}}{}^{g(x)} = \lim_{x\to 0} e^{g(x)\ln f(x)}$ ← typisk $0\cdot\infty$

Eksempel: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\left(e^{\ln\cos x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}$

Mellomregning: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}$

$= \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{1}{\cos x}}{2} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$

Tilbake

$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}} = e^{-1/2}$