Spekulasjon: Har alle n-te gradsligninger n løsninger når vi tillater komplekse løsninger og teller "med multiplisitet"?

Bevis: Gauss beviste dette i 1799.

Motivasjon: **Tenk baklengs:** Gitt komplekse tall $r_1, r_2, \ldots, r_n$, er det mulig å finne ~~et~~ n-tegrads polynom som har disse som røtter

$$P(z) = (z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_n) = \underbrace{n\text{-tegradspolynom}}_{\text{ganger ut}}$$

Eksempel: Vil ha et polynom med røtter $i, -i, 3, -1$

$$P(z) = \underbrace{(z-i)(z+i)}\,\underbrace{(z-3)(z+1)} = \underbrace{(z^2-i^2)}_{(z^2+1)}(z^2-2z-3)$$

$$= z^4 - 2z^3 \underbrace{- 3z^2} \underbrace{+ z^2} - 2z - 3 = \underbrace{z^4 - 2z^3 - 2z^2 - 2z - 3}$$

Er det mulig å gå den andre veien?

Algebraens fundamentalteorem

Anta at

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$$

er et komplekst n-tegradspolynom. Da finnes det komplekse tall $r_1, r_2, \dots, r_n$ slik at

$$P(z) = c_n (z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n)$$

Det kan tenkes at noen av røttene $r_1, r_2, \dots, r_n$ er like, og da er det lurt å samle dem:

$$P(z) = c_n (z - r_1)^{m_1} (z - r_2)^{m_2} \dots (z - r_j)^{m_j}$$

der $r_1, r_2, \dots, r_j$ er de forskjellige røttene til $P(z)$

Vi kaller m_1 multiplisiteten til roten r_1 osv.

Vi ser at $m_1 + m_2 + \dots + m_j = n$

Konklusjon: Et n-te gradspolynom har alltid n røtter dersom vi tillater komplekse tall og teller røttene med multiplisitet.

Eksempel: $P(z) = (z-1)^3 (z-(1-i))^2 (z+7) = \underbrace{6\text{-te grad}}$

har 3 forskjellige røtter:

1 med multiplisitet 3
$(1-i)$ —— " —— 2
-7 —— " —— 1

6 = graden til polynomet.

Hva skjer hvis vi bare vil regne med reelle tall?

Da kan vi ikke alltid faktorisere i reelle førstegrads-polynomer.

$$P(z) = z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$$

Skal ikke reelt

$$P(z) = \overbrace{c_n}(z-r_1)\ldots(z-r_j)(z^2+a_1z+b_1)(z^2+a_2z+b_2)\ldots\ldots$$

reelle

Et n-te gradspolynom

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$$

kalles <u>reelt</u> dersom $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ er reelle tall

<u>Lemma:</u> Hvis P er et reelt polynom med en komplekst rot r, så er også $\bar{r}$ en rot.

<u>Bevis:</u> Vi vet at $P(r) = 0$. Dermed er

$$0 = \bar{0} = \overline{P(r)} = \overline{c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \dots + c_1 r + c_0} =$$

$$= \overline{c_n r^n} + \overline{c_{n-1} r^{n-1}} + \dots + \overline{c_1 r} + \overline{c_0} =$$

$$= \underbrace{\overline{c_n}}\,\bar{r}^n + \underbrace{\overline{c_{n-1}}\,\bar{r}^{n-1} + \dots + \overline{c_1}}_{\text{reelle tall}}\,\bar{r} + \underbrace{c_0}$$

$$= c_n \bar{r}^n + c_{n-1} \bar{r}^{n-1} + \dots + c_1 \bar{r} + c_0 = P(\bar{r})$$

altså $P(\bar{r}) = 0$, dvs $\bar{r}$ er en rot i P.

<u>Konklusjon:</u> De komplekse røttene til et reelt polynom kommer i konjugerte par: Er r en rot, så er $\bar{r}$ det også. Man kan også vise at r og $\bar{r}$ har samme multiplisitet.

Hva kan dette brukes til: $r = a+ib$, $\bar{r} = a-ib$

$$P(z) = c_n(\quad)\ldots(z-r)\ldots(z-\bar{r})\ldots$$

Ser på

$$(z-r)(z-\bar{r}) = (z-(a+ib))(z-(a-ib))$$

$$= \underbrace{((z-a)-ib)((z-a)+ib)}_{\text{konjugert}} = (z-a)^2-(ib)^2$$

$$= \underbrace{z^2-2az+a^2+b^2}_{\text{reelt polynom.}}$$

<u>Algebraens fundamentalteorem</u>: Et reelt n-tegrads polynom $P(z)$ kan alltid skrives som et produkt av <u>reelle</u> første og annengradsfaktorer:

$$P(z) = c_n(z-r_1)\ldots(z-r_j)(z^2+a_1z+b_1)\ldots(z^2+a_kz+b_k)$$

<u>Bevis</u>: Fra algebraens fundamentalteorem vil vi

$$P(z) = c_n\underbrace{(z-r_1)\ldots(z-r_j)}_{\text{de reelle røttene}}\ldots\underbrace{\overbrace{(z-r)\ldots(z-\bar{r})}^{z^2+az+b}\ldots}_{\text{komplekse røtter}}$$

Eksempel: Vis at i er en rot i

$$P(z) = z^4 + z^3 - z^2 + z - 2$$

og finn den komplekse og reelle faktoriseringen av P.

Sjekker at i er en rot.

$$P(i) = \underbrace{i^4}_{i^2 \cdot i^2} + \underbrace{i^3}_{i \cdot i^2} - i^2 + i - 2 = 1 - \cancel{i} + 1 + \cancel{i} - 2 = 0$$

Hurra! i er en rot.

Mer hurra: P er reell, så da må også $\bar{i} = -i$ være en rot.

Det betyr at hvis vi faktoriserer P, så har

$$P(z) = (\quad)(z-i)\ldots(z+i)\ldots$$

$$= (\quad)(\quad)(z^2+1)$$

Dette betyr at $P(z)$ er delelig med z^2+1.

Polynomdivisjon:

$$z^4 + z^3 - z^2 + z - 2 : z^2 + 1 = z^2 + z - 2$$

$$-(z^4 + z^2)$$

$$z^3 - 2z^2 + z - 2$$

$$-(z^3 + z)$$

$$-2z^2 - 2$$

$$-2z^2 - 2$$

$$0$$

$$= (z+2)(z-1)$$

Hva betyr dette:

$$z^4 + z^3 - z^2 + z - 2 = (z^2+1)(z^2+z-2)$$

$$= (z^2+1)(z+2)(z-1) \leftarrow \text{reelle faktorisering}$$

$$= (z-i)(z+i)(z+2)(z-1) \leftarrow \text{komplekse faktorisering.}$$