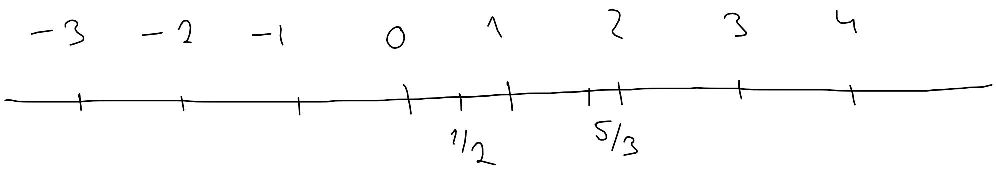
Kap 3 → 2.3 + 4.3 → Kap 5

Kompletthet

Tallinjen



$\mathbb{R}$ = de reelle tallene = tallene på tallinjen

= alle desimaltall

Et reelt tall som kan skrives som en brøk $\frac{a}{b}$ der a og b er hele tall, kalles et rasjonalt tall

Eks: $\frac{3}{2}$, $\frac{-17}{24}$, $3 = \frac{3}{1}$

Et reelt tall som ikke er rasjonalt, kalles irrasjonalt:

Eks: $\sqrt{2}$, π, e

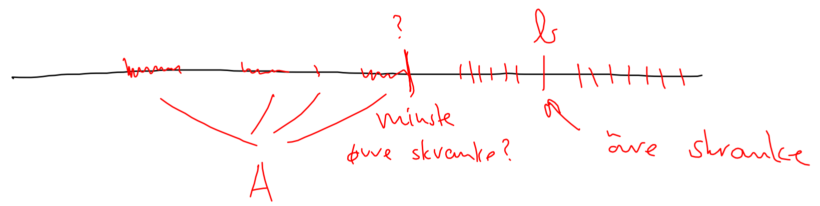
Tallverdi: $|x| = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$ så $|7| = 7$, $|-7| = -(-7) = 7$

$|a-b|$ = avstanden mellom a og b.

Trekantulikheten: $|a+b| \leq |a| + |b|$

$|7+(-3)| = |7-3| = 4$

$|7| + |-3| = 7+3 = 10$

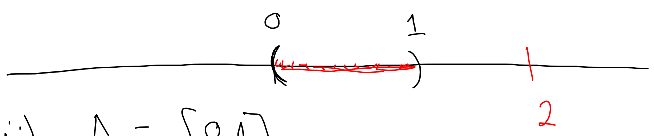


En delmengde A av $\mathbb{R}$ kalles <u>oppad begrenset</u> dersom det finnes et tall b slik at $b \geq a$ for alle $a \in A$. Vi kaller b en øvre skranke for A.

<u>Kompletthetsprinsippet</u>: Enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde A av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke.

Den minste øvre skranken til A kalles også <u>supremum</u> til A og betegnes med $\sup A$

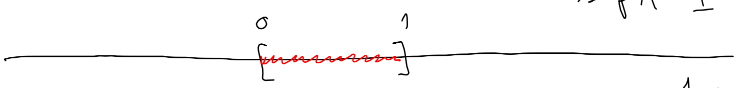
<u>Eksempel</u>: (i) $A = (0,1)$, $\sup A = \underline{1}$



$\underline{1} \notin A$

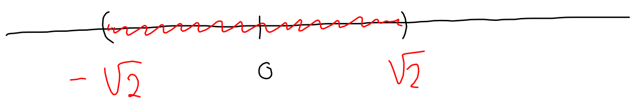
(ii) $A = [0,1]$

$\sup A = \underline{1}$



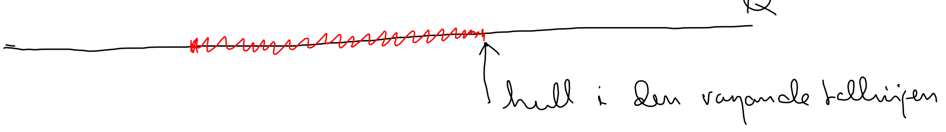
$1 \in A$

(iii) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$, $\sup A = \sqrt{2}$

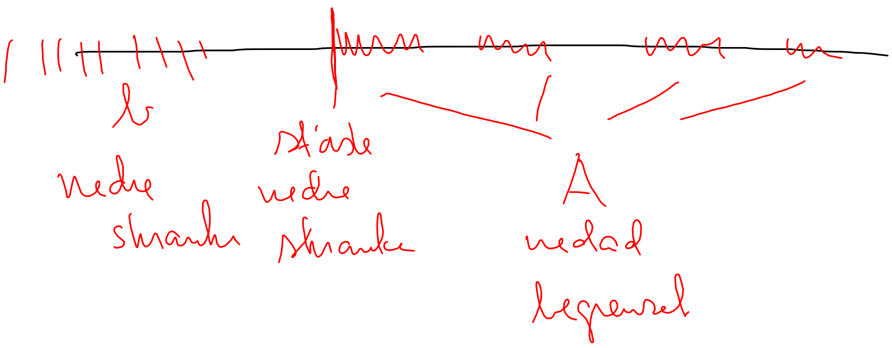


<u>Tankeeksperiment</u>: Tenk hvis vi bare arbeidet med rasjonale tall

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$



Nedre skranker:



Störst nedre skranke til A = infimum til A

$$= \underline{\inf A}$$

Følger (seksjon 4.3)

En følge er en uendelig sekvens av reelle tall

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Vanlig notasjon: $\{a_n\}$

Følger kan starte andre steder enn 1

$$a_3, a_4, a_5, \dots \quad , \quad \{a_n\}_{n=3}^{\infty}$$

$$a_0, a_1, a_2 \quad , \quad \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

når vi vil understreke hva vi begynner

Eksempler:

$1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots \qquad \{n\}$

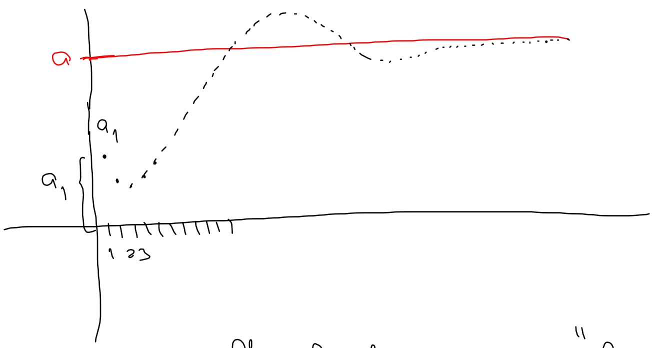
$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots \qquad \{n^2\}$

$1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots \qquad \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$

$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$

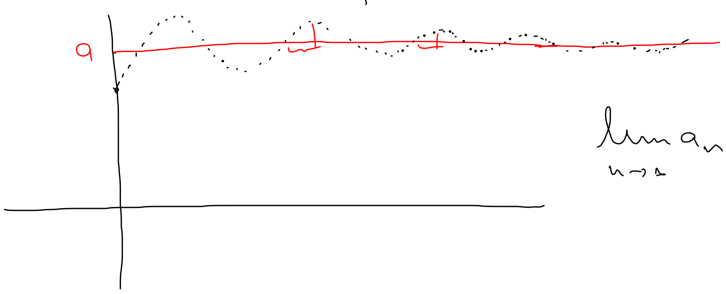
Vi skal være interessert i grenseverdier for følger:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$



Man sier ofte at $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ "dersom a_n nærmer seg a når n går mot uendelig"

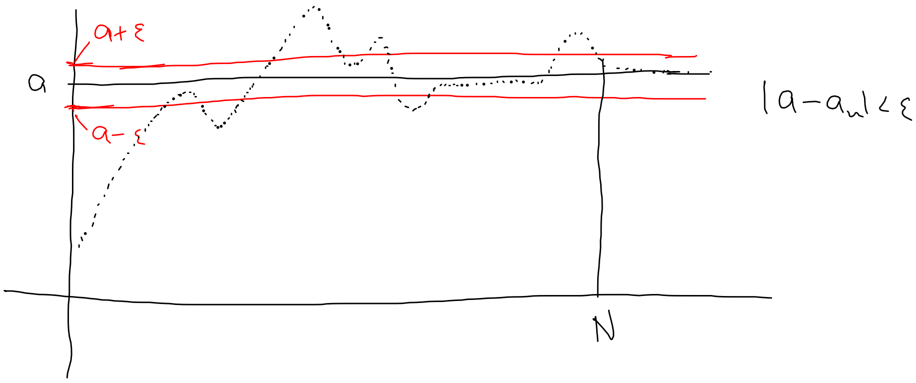
Hva med denne situasjonen



$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Nytt forsøk: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ vil si at vi kan få a_n så nær a vi måtte ønske, ved å gå tilstrekkelig langt ut i følgen

Presisering: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at hvis $n \geq N$, så er $|a - a_n| < \varepsilon$.



Eksempel: Bruk definisjonen til å vise at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

(I praksis: $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$)

Vi må vise at hvis man gir oss en $\varepsilon > 0$, kan vi alltid finne en $N \in \mathbb{N}$ slik at $\Big|\underset{a}{1} - \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{a_n}\Big| < \varepsilon$ når $n \geq N$.

$$\left|1 - \frac{n-1}{n}\right| = \left|1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$ ønsker meg

Hvis vi velger $N > \frac{1}{\varepsilon}$, så vil $\varepsilon > \frac{1}{N}$. Hvis $n \geq N$, så er da

$$\left|1 - \frac{n-1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

HURRA!

Regneregler for grenseverdier: Anta at $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = A+B$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = A-B$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ (forutsatt at $B \neq 0$)

Eksempler: (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3+2n-4}{3n^3+n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}(7+\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^3})}{\cancel{n^3}(3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3})}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7+\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^3} \to 7}{3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3} \to 3} \overset{(iv)}{=} \frac{7}{3}$$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3+2n-4}{3n^2+n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\infty}{\cancel{n^3}}\overset{\to 7}{(7+\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^3})}}{\cancel{n^2}\underbrace{(3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2})}_{\to 3}} = \infty$

(iii) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$ "$\infty - \infty$"

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

trekker n i samme retning

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\to 1}}+1} = \frac{1}{2}$$