Uegentlig integraler

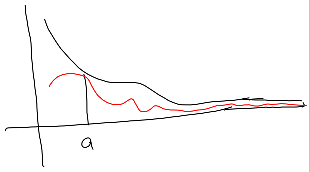
$f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ kontinuerlig:

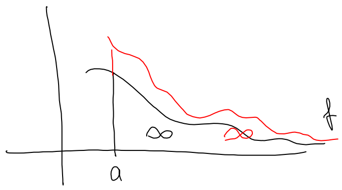
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$ forutsatt at denne grensen eksisterer. I så fall sier vi at $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerer, hvis ikke divergerer det.

Setning: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergerer for $p>1$ og divergerer for $p\le 1$.

Observasjon: a) Hvis $0 \le g(x) \le f(x)$ og $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerer, så konvergerer også $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

b) Hvis $0 \le f(x) \le g(x)$ og $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergerer, så divergerer også $\int g(x)\,dx$.





Sammenligningstest.

Grensesammenligningskriteriet: Anta at $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ er positive og kontinuerlig.

(i) Anta at $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergerer og

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

så konvergerer også $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

(ii) Anta at $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergerer og

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

så divergerer også $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Eksempel: Avgjør om $\int_1^\infty \frac{2x}{x^3+2x+1}\,dx$ konvergerer eller divergerer. $-f(x)$

Hva skjer med brøken når x blir stor: $$\frac{2x}{x^3(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})} = \underbrace{\frac{2}{x^2(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}}$$

Samme størrelsesorden som $\frac{1}{x^2}$

Vet at $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergerer? $\sim g(x)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{\cancel{x^2}(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}}{\frac{1}{\cancel{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = 2 < \infty$$

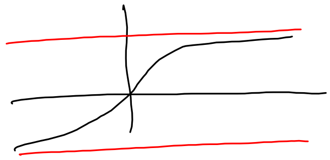
I følge grensesammenligningskriteriet betyr dette at

$$\int_1^\infty \frac{2x}{x^3+2x+1}\,dx \text{ konvergerer.}$$

Eksempel: Konvergerer eller divergerer $\int_1^\infty \underbrace{\overbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}^{f(x)}}_{\downarrow\ 0} dx$

Sammenligner med $g(x) = \frac{1}{x}$

Vet at $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergerer.



$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = 1 > 0$$

Siden $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergerer, gjør $\int\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)dx$ det også!

Hvorfor akkurat $\frac{1}{x}$? Og ikke $\frac{1}{x^2}$ eller $\frac{1}{x^{1/2}}$ eller ...

Triks: Sammenligner med en generell $\frac{1}{x^p}$ og finner ut hvilken p som er lurt etterhvert.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-p}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-p\,x^{-p-1}}$$

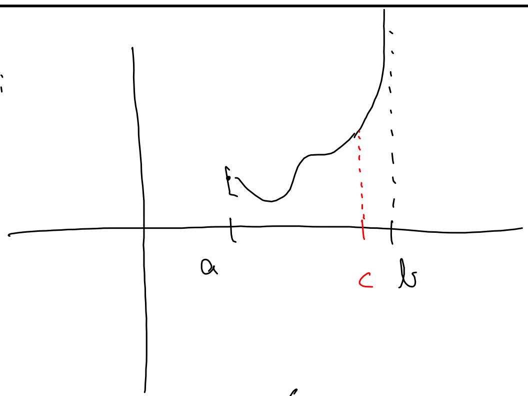
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{p\,\frac{1}{x^{p+1}}} = \frac{1}{p}\lim_{x\to\infty} \frac{x^{p+1}}{1+x^2}$$

Haha, lurt å bruke $p = 1$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

PANIKKHJELP 16 $\longrightarrow \infty$

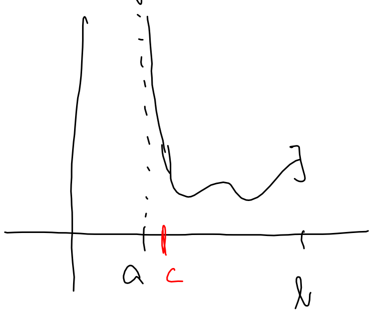
Tilfellet:



$f:[a,b)\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$ forutsatt at denne grensen eksisterer. I så fall sier vi at integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ **konvergerer**; hvis ikke sier vi at det **divergerer**.

$f:(a,b]\to\mathbb{R}$

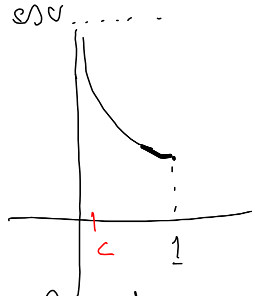


$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$ forutsatt at grensen eksisterer osv.....

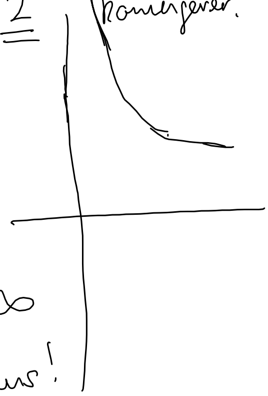
Eksempel:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+}\left[2-2\sqrt{c}\right] = \underline{\underline{2}}$$



konvergerer.



Eksempel:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+}\left[-1+\frac{1}{c}\right] = \infty$$

divergerer!

Løsning: Integralet $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergerer for $p<1$ og divergerer for $p\geq 1$.

n-tupler

Et n-tuppel er en "liste" av n tall

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Eksempler:

$\vec{a} = (-3, 4, \sqrt{2}, \pi, e^2)$ er et 5-tuppel

$\vec{b} = (-100, 3, 0, \sqrt{3})$ —"— 4-tuppel

Regneoperasjoner for n-tupler: $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

Addisjon: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

Subtraksjon: $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$

Multiplikasjon med skalar: c er et tall:

$$c\vec{a} = (ca_1, ca_2, \dots, ca_n)$$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ (et tall).

Eksempel: Du har en butikk og $p_1, p_2, \dots, p_n$ er pris på varene før moms: $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

Momstuppel: $\vec{m} = 0.25\vec{p} = (0.25p_1, 0.25p_2, \dots, 0.25p_n)$

Pris etter moms: $\vec{q} = \vec{p} + \vec{m} = (\underbrace{1.25p_1}, 1.25p_2, \dots, 1.25p_n)$

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ antall av hver varetype.

Total utsalgspris: $\vec{a} \cdot \vec{q} = a_1(1.25p_1) + a_2(1.25p_2) + \dots$

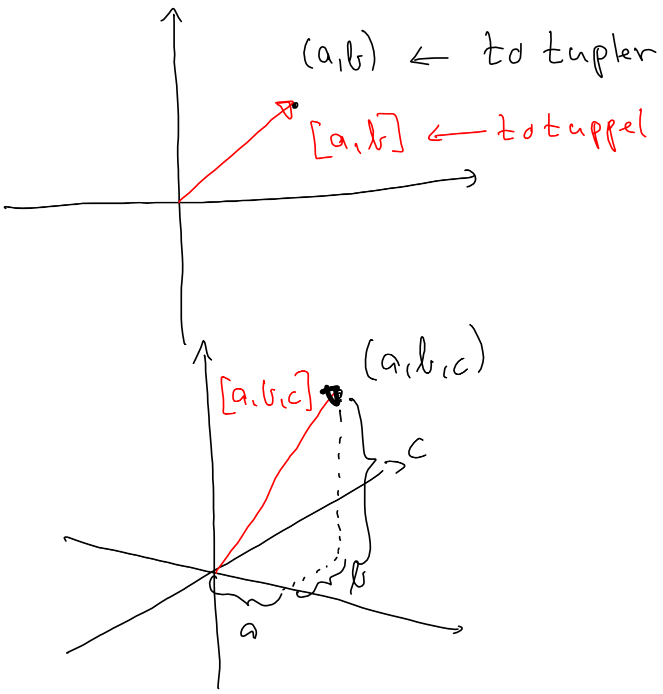
$\mathbb{R}^n$: er samlingen av alle reelle n-tupler: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C}^n$: —————— " —— komplekse n-tupler $(z_1, z_2, \dots, z_n)$

$z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Vi har truffet 2- og 3-tupler før:



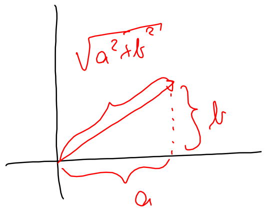
Vi skal ofte tenke på to-tupler som punkter eller vektorer i planet, men bruke notasjonen (a, b) uansett.

Tre tupler er ofte punkter eller vektorer i rommet. Uansett bruker vi notasjonen (a,b,c)

okt 28-13:35

Geometri for n-tupler

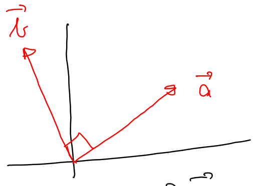
Lengde av n-tuppel: 2-dim: $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$



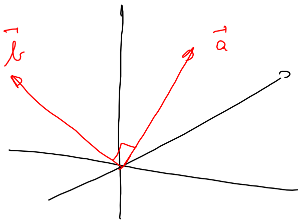
3-dim: $|(a,b,c)| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Vi definerer lengden eller normen til et n-tuppel $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ved: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

Stå normalt på hverandre:



$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Definisjonen: To n-tupler $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ står normalt på hverandre dersom $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

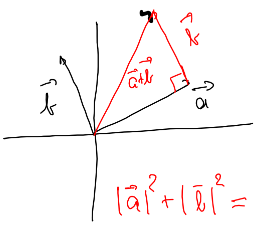
Viktig sammenheng: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 + \dots + a_na_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = |\vec{a}|^2$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

(fordi $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

Pythagoras' teorem i $\mathbb{R}^n$: Anta at $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ står normalt på hverandre. Da er

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$



$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$

Bevis: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{0} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + 0 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$