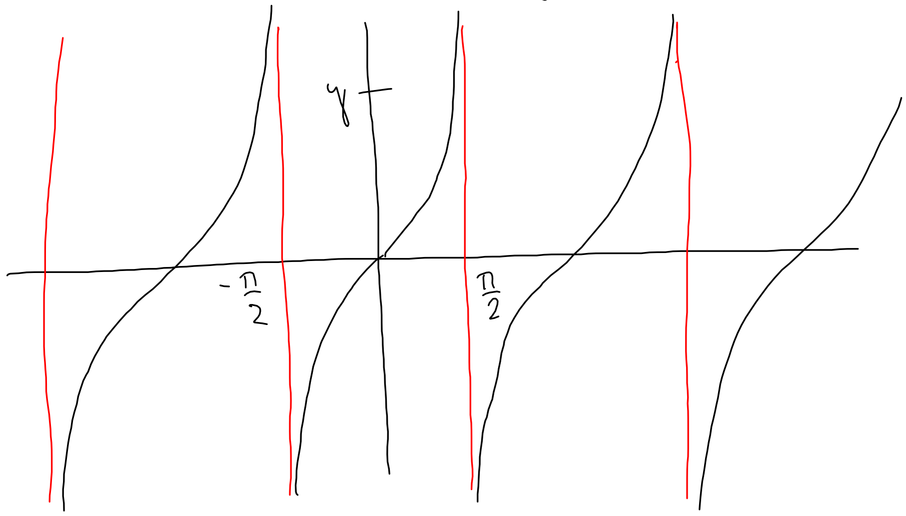
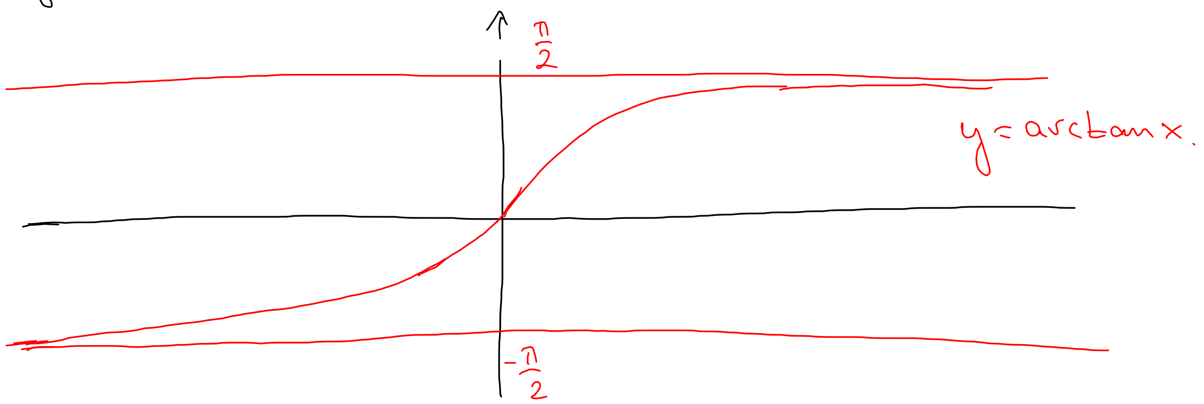
Arcustangens



Definisjon: La $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \tan x$.
Da kalles den omvendte funksjonen $g: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ arcustangens og betegnes med arctan, $\tan^{-1}$.



x	$\tan x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$x \to \frac{\pi}{2}^-$	$\tan x \to \infty$

x	$\arctan x$
0	0
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$x \to \infty$	$\arctan x \to \frac{\pi}{2}$

<u>Derivasjon:</u> $\underbrace{\text{arctan}}_{g}$ er den inverse funksjon til $\underbrace{\tan}_{f}$

<u>Generelt:</u> $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, der $y = f(x) = \tan x$

Vet at $f'(x) = (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Dermed:

$$(\arctan y)' = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

<u>Altså:</u>

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

<u>Eksempel:</u> Deriver $f(x) = \arctan(\sin x)$

<u>Kjerneregel:</u> $f'(x) = \dfrac{1}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

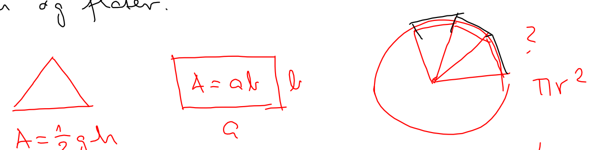
<u>Eksempel:</u> Finn $\lim\limits_{x\to\infty} \underset{\downarrow \atop \infty}{x} \Big(\underbrace{\tfrac{\pi}{2} - \arctan x}_{\downarrow \atop 0}\Big) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$

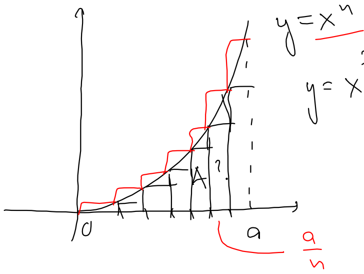
$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{+\frac{1}{1+x^2}\cdot x^2}{+\frac{1}{x^2}\cdot x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = \underline{\underline{1}}$$

Integrasjon (kap 8)

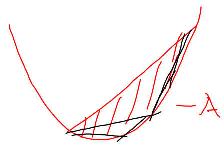
Historisk sett så handler integrasjon om å beregne arealer, volumer og flater.

Utgangspunkt:





Fermat

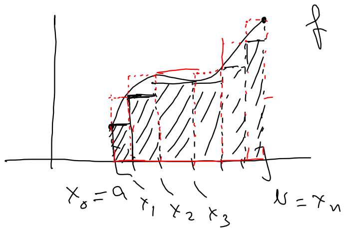


$$\sum_{i=1}^{N} i^n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \dots$$

Newton, Leibniz

Trappesummer

Intuitivt utgangspunkt: Beregne integral under en positiv funksjonsgraf:



Partisjon:

$$\Pi = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

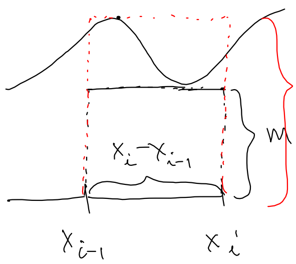
i-te intervall: $[x_{i-1}, x_i]$

Areal til svarte bokser: $N(\Pi)$ – nedre trappesum til Π – beregnbare

Areal til røde bokser: $\Phi(\Pi)$ – øvre trappesum til Π. – beregnbar.

Hvis området under funksjonsgrafen har et areal A, så får $N(\Pi) \le A \le \Phi(\Pi)$.

Hvordan beregner man $N(\Pi)$ og $\Phi(\Pi)$



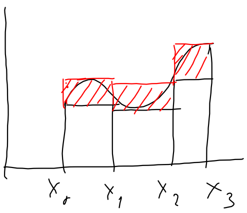
$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

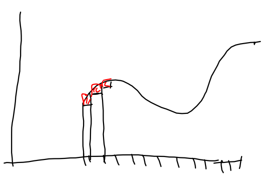
$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$N(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$ ← nedre tilnærming

↑ til arealet.

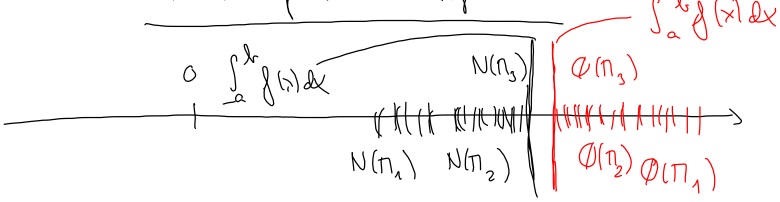
$$\Phi(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$ ← øvre tilnærming





sep 30-12:35

Øvre- og nedre integralet



$\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \sup\{N(\Pi) : \Pi$ en partisjon av $[a,b]\}$ = nedre-integralet.

$\overline{\int}_a^b f(x)\,dx = \inf\{\Phi(\Pi) : \Pi$ en partisjon av $[a,b]\}$ = øvre-integralet

Generelt er $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\int}_a^b f(x)\,dx$.

Definisjon: Vi sier at f er integrerbar over $[a,b]$ dersom $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^b f(x)\,dx$. I så fall definerer vi integralet til f over $[a,b]$ ved

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^b f(x)\,dx.$$

Hvis f ikke er integrerbar, så er $\int_a^b f(x)\,dx$ ikke definert.

Eksempel: Funksjonen $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ er rasjonal} \\ 0 & \text{hvis } x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$

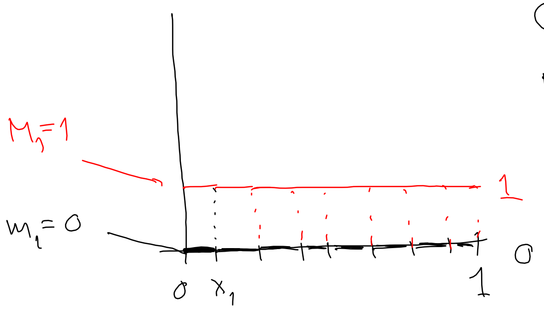
er ikke integrerbar over $[0,1]$ fordi

$$\underline{\int}_0^1 f(x)\,dx = 0 \quad \text{mens} \quad \overline{\int}_0^1 f(x)\,dx = 1$$

Hvorfor: Ta en partisjon Π

$\Phi(\Pi) = 1$

$N(\Pi) = 0$



Oppsummering:

Nedre integral = beste tilnærming nedenfra

$= \sup\{N(\Pi) : \Pi \text{ en part}\} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Øvre integral = beste tilnærming ovenfra

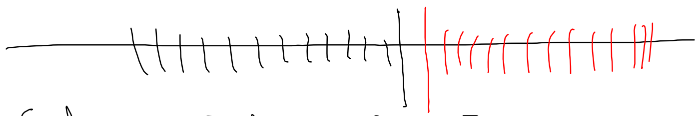
$= \inf\{\Phi(\Pi) : \Pi \text{ en part}\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

så lenge f er begrenset

Disse eksisterer bestandig og $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

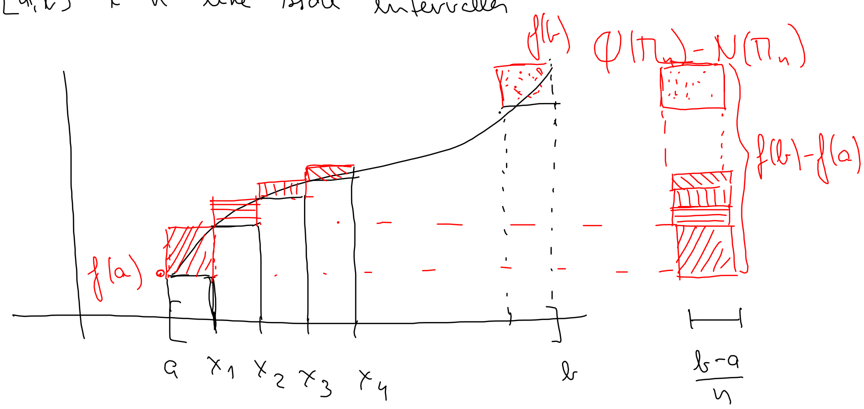
Dersom $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, så er f integrerbar og da definerer vi $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Observasjon: Dersom vi kan få $\Phi(\Pi) - N(\Pi)$ så liten vi vil ønske ved å velge Π smart, så er f integrerbar.



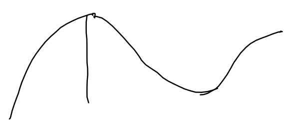
Setning: Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er monoton. Da er f integrerbar over $[a,b]$.

Bevis: La Π_n være partisjonen vi får ved å dele inn $[a,b]$ i n like store intervaller



$$\Phi(\Pi_n) - N(\Pi_n) = (f(b) - f(a)) \cdot \frac{b-a}{n} \to 0 \quad \text{når } n \to \infty$$

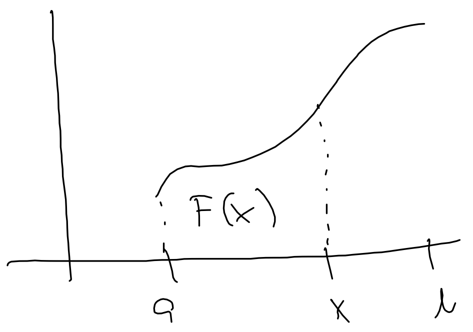
Følgelig er f integrerbar!



Analysens fundamentalteorem: Hvis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig, så er f integrerbar på alle intervall $[a,x]$ for enhver $x\in[a,b]$, og funksjonen

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

er kontinuerlig med derivert $F'(x)=f(x)$ i alle $x\in(a,b)$.



$$F'(x)=f(x)$$