n-tupler

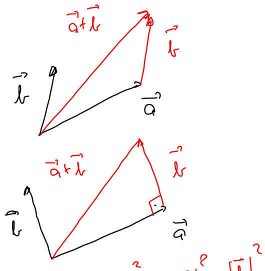
$\vec{a} = (a_1, a_2, .., a_n)$, der $a_1, a_2, .., a_n \in \mathbb{R}$

Lengde: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

Normalt på: $\vec{a} \perp \vec{b}$ dvs $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Pythagoras' teorem: Hvis $\vec{a} \perp \vec{b}$, så

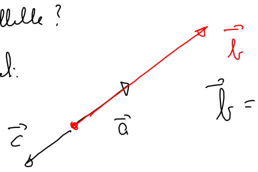
$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$



$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

Hva betyr det at to n-tupler er parallelle?

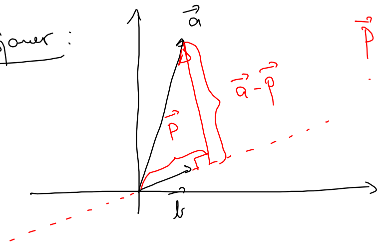
I planet:



$\vec{b} = t\vec{a}$

Definisjon: To ikke-null n-tupler $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle dersom det finnes et tall t slik at $\vec{b} = t\vec{a}$.

Projeksjoner:



$\vec{p}$ er projeksjonen av $\vec{a}$ ned på $\vec{b}$.

$\vec{p}$ er en vektor parallell med $\vec{b}$ slik at $\vec{a}-\vec{p}$ står normalt på $\vec{b}$.

Definisjon: Anta at $\vec{a}, \vec{b}$ er to ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^n$. Projeksjonen av $\vec{a}$ ned på $\vec{b}$ er vektoren $\vec{p}$ parallell med $\vec{b}$ slik at $\vec{a}-\vec{p}$ står normalt på $\vec{b}$.

La oss finne $\vec{p}$: $\vec{p}$ — parallell med $\vec{b}$: $\vec{p} = t\vec{b}$; $\vec{a}-\vec{p} \perp \vec{b}$: $(\vec{a}-\vec{p})\cdot\vec{b} = 0$ } må finne t

Vi har: $0 = (\vec{a}-\vec{p})\cdot\vec{b} = (\vec{a}-t\vec{b})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} - t\vec{b}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} - t|\vec{b}|^2$

dvs $\vec{a}\vec{b} - t|\vec{b}|^2 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$

$$\vec{p} = t\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

Setning: Projeksjonen $\vec{p}$ av $\vec{a}$ ned på $\vec{b}$ er gitt ved

$$\vec{p} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$$

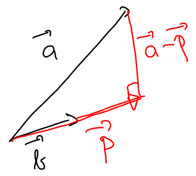
Lengden til $\vec{p}$ er

$$|\vec{p}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Fordi: $|t\vec{b}| = |t||\vec{b}|$

$|\vec{p}| = \left|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\right| = \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|^{\cancel{2}}}\cancel{|\vec{b}|} = \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

Kombinerer projeksjon og Pythagoras:



Pythagoras: $|\vec a|^2 = |\vec a-\vec p|^2+|\vec p|^2 \ge |\vec p|^2 = \left(\frac{|\vec a\cdot\vec b|}{|\vec b|}\right)^2$

dvs $$|\vec a|^2 \ge \frac{|\vec a\cdot \vec b|^2}{|\vec b|^2} \quad \Big| \cdot |\vec b|^2$$

$$|\vec a|^2|\vec b|^2 \ge |\vec a\cdot\vec b|^2$$

$$(|\vec a||\vec b|)^2 \ge |\vec a\cdot \vec b|^2$$

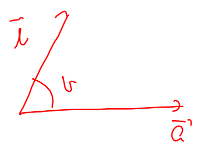
$$|\vec a||\vec b|\ge|\vec a\cdot\vec b|$$

Schwarz' ulikhet: For alle $\vec a,\vec b\in\mathbb{R}^n$

$$|\vec a\cdot\vec b|\le|\vec a||\vec b|$$

Bemerkning: I planet og rommet er $\vec a\cdot\vec b = |\vec a||\vec b|\cos v$

Altså: $|\vec a\cdot \vec b| = |\vec a||\vec b||\cos v| \le |\vec a||\vec b|$



Vi kan nå reversere denne prosedyren og definere vinkelen v mellom n-tupler $\vec a$ og $\vec b$ ved å si v er vinkelen mellom 0° og 180° slik at

$$\cos v = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}$$

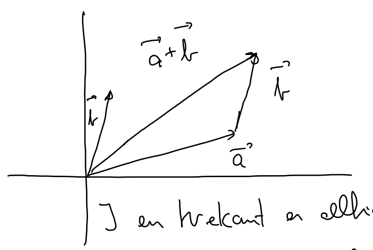
(OK siden Schwarz garanterer at $\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}$ alltid ligger mellom -1 og 1)

Litt kortere uttrykk:

$$v = \arccos \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}$$

Trekantulikheten: Hvis $\vec a,\vec b\in\mathbb{R}^n$, så

$$|\vec a+\vec b| \le |\vec a|+|\vec b|$$



I en trekant er alltid lengden til den ene siden mindre enn summen av lengdene til de to andre.

Bevis: $|\vec a+\vec b|^2 = (\vec a+\vec b)\cdot(\vec a+\vec b)$

$$= \vec a\cdot\vec a + 2\vec a\cdot\vec b + \vec b\cdot\vec b$$

$$\le |\vec a|^2 + 2|\vec a\cdot\vec b| + |\vec b|^2$$

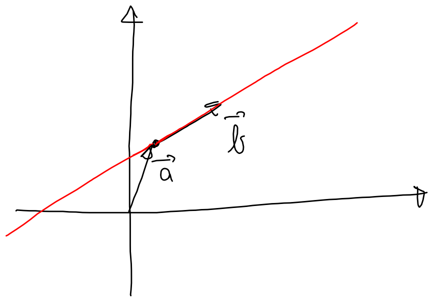
Schwarz

$$\le |\vec a|^2 + 2|\vec a||\vec b| + |\vec b|^2 = (|\vec a|+|\vec b|)^2$$

dvs $$|\vec a+\vec b|^2 \le (|\vec a|+|\vec b|)^2$$

Derfor: $$|\vec a+\vec b| \le |\vec a|+|\vec b|$$

Linjer



Linjen gjennom $\vec a$ i retning $\vec b$

$$\vec r(t) = \vec a + t\vec b$$

Vi starter i $\vec a$

parallell med $\vec b$

Definisjon: Linjen gjennom $\vec a$ parallell med $\vec b$ består av alle punkter på formen

$$\vec r(t) = \vec a + t\vec b \qquad \text{der } t \in \mathbb{R}$$

Eksempel: Linjen gjennom $\vec a = (3,-1,2,1)$ parallell med $\vec b = (1,2,-3,1)$ er

$$\vec r(t) = (3,-1,2,1) + t(1,2,-3,1) = (3+t, -1+2t, 2-3t, 1+t)$$

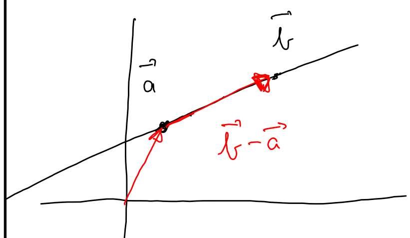
Ligger $\vec c = (2,3,-1,0)$ på linjen? I så fall må det finnes en t slik at $\vec r(t) = \vec c$, dvs

$$\underbrace{3+t=2}_{t=-1}, \quad \underbrace{-1+2t=3}_{t=2}, \quad 2-3t=-1, \quad 1+t=0$$

kan ikke oppfylles av samme t!

c ligger ikke på linjen.

Eksempel: Finn linjen gjennom $\vec a = (2,-1,3,0)$ og $\vec b = (1,2,-1,3)$



Aha, dette må være linjen gjennom $\vec a$ i retning $\vec b - \vec a$.

$$\vec r(t) = \vec a + t(\vec b - \vec a)$$

Spørsmål: Inneholder denne linjen $\vec a$ og $\vec b$?
$\vec r(0) = \vec a$
$\vec r(1) = \vec b$

Altså

$$\vec r(t) = (2,-1,3,0) + t\left[(1,2,-1,3) - (2,-1,3,0)\right]$$

$$= (2,-1,3,0) + t(-1,3,-4,3) = (2-t, -1+3t, 3-4t, 3t)$$

Komplekse n-tupler

Et komplekst n-tuppel: $\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ der $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

Eksempel: $\vec{z} = (1-i, 2+3i, 7, \pi, 1-i\sqrt{2}) \in \mathbb{C}^5$

Som før: $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

$$\vec{z} + \vec{w} = (z_1+w_1, z_2+w_2, \ldots, z_n+w_n)$$
$$c\vec{z} = (cz_1, cz_2, \ldots, cz_n)$$

To ting er annerledes:

Lengden / normen: $|\vec{z}| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}$

$$z_1 = a_1 + i b_1$$
$$|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

Reelle: $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

alltid positive

$i^2 = -1$

I det reelle tilfellet liker vi velegjane $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Skalarprodukter: Ønsker å beholde $\vec{z} \cdot \vec{z} = |\vec{z}|^2$

Definerer skalarproduktet ved

$$\vec{z} \cdot \vec{w} = z_1 \cdot \overline{w_1} + z_2 \cdot \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n}$$

Dermed

$$\vec{z} \cdot \vec{z} = z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + \cdots + z_n \overline{z_n} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 = |\vec{z}|^2$$

Konjugasjonen i annen faktor gjør at vi må passe litt på regnereglene:

(i) $\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $c \in \mathbb{C}$

$$\vec{z} \cdot (c\vec{w}) = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \cdot (cw_1, cw_2, \ldots, cw_n)$$
$$= z_1 \cdot \overline{(cw_1)} + z_2 \overline{(cw_2)} + \cdots + z_n \overline{(cw_n)}$$
$$= z_1 \cdot \overline{c}\, \overline{w_1} + z_2 \overline{c}\, \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{c}\, \overline{w_n}$$
$$= \overline{c} \, (z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n}) = \overline{c} (\vec{z} \cdot \vec{w})$$

Regneregler: $(c\vec{z}) \cdot \vec{w} = c (\vec{z} \cdot \vec{w})$

$$\vec{z} \cdot (c\vec{w}) = \overline{c} (\vec{z} \cdot \vec{w})$$

Dessuten: $\vec{z} \cdot \vec{w} = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n}$

$$\vec{w} \cdot \vec{z} = \underline{w_1 \overline{z_1} + w_2 \overline{z_2} + \cdots + w_n \overline{z_n}}$$

Ser at $\overline{\vec{z} \cdot \vec{w}} = \overline{z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n}} = \overline{z_1 \overline{w_1}} + \overline{z_2 \overline{w_2}} + \cdots + \overline{z_n \overline{w_n}}$

$$= \underline{\overline{z_1} w_1 + \overline{z_2} w_2 + \cdots + \overline{z_n} w_n} = \vec{w} \cdot \vec{z}$$

Altså: $\vec{w} \cdot \vec{z} = \overline{\vec{z} \cdot \vec{w}}$