Seksjon 4.3

Oppgave (1). *Finn grenseverdiene:*

- *a)* $\lim_{n\to\infty} \frac{8n^4+2n}{3n^4-7}$
- *b)* $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4}{-2n^3+7}$
- *c)* $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+2n-13}{7n-4}$
- *d)* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3-13}{5n^3-4} - \frac{4n^4+12}{1-5n^4}\right)$
- *e)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+2\sin(n)}{e^{-n}+6n^5}$

Løsning. Vi vil bruke samme metode som i Eksempel 4.3.5 fra boken i disse oppgavene. Når vi skal finne grensen av en brøk hvor man har polynomer i teller og nevner, vil det lønne seg å dele på den høyeste potensen som opptrer.

- a) Her ser vi at den høyeste potensen er n^4. Dermed deler vi på denne i teller og nevner.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^4+2n}{3n^4-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{8+\frac{2}{n^3}}{3-\frac{7}{n^4}}.$$

  Ved å bruke regneregel (iv) fra 4.3.3 i boken, kan vi ta grenseverdien av teller og nevner. For telleren har vi at $\lim_{n\to\infty} 8 + \frac{2}{n^3} = 8$, og for nevner har vi $\lim_{n\to\infty} 3 - \frac{7}{n^4} = 3$. Dermed får vi at grenseverdien blir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^4+2n}{3n^4-7} = \frac{8}{3}.$$

  Merknad: Husk at vi kan anvende regneregel (iv) kun når teller og nevner konvergerer. Dermed blir det nødvending å dele på høyeste potens først.

- b) Vi ser at den høyeste potensen er n^3, så

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4}{-2n^3+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}-\frac{4}{n^3}}{-2+\frac{7}{n^3}}.$$

  Her ser vi at teller går mot 0 når $n \to \infty$. Nevner ser vi går mot -2 når $n \to \infty$. Dermed er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4}{-2n^3+7} = \frac{0}{-2} = 0.$$

- c) Her er høyeste potens n^3.

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{5n^3+2n-13}{7n-4} = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{5+\frac{2}{n^2}-\frac{13}{n^3}}{\frac{7}{n^2}-\frac{4}{n^3}}.$$

  Vi ser at grenseverdien til teller er 5, mens nevner konvergerer mot 0. Uttrykket divergerer altså mot ∞ eller $-\infty$. For å finne ut hvilken av disse uttrykket divergerer mot, deler vi heller på den laveste potensen. Da får vi

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{5n^3+2n-13}{7n-4} = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{5n^2+2-\frac{13}{n}}{7-\frac{4}{n}}.$$

  Her ser vi at nevner konvergerer mot 7, mens teller divergerer mot ∞. Uttrykket vårt vil dermed øke ubegrenset når $n \to \infty$. Altså ser vi at

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{5n^3+2n-13}{7n-4} = \infty.$$

- d) Her regner vi ut grenseverdien til hvert ledd først. Vi bruker samme fremgangsmåte som over. Det første leddet blir

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{2n^3-13}{5n^3-4} = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{2-\frac{13}{n^3}}{5-\frac{4}{n^3}} = \frac{2}{5}.$$

  Det andre leddet blir

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} -\frac{4n^4+12}{1-5n^4} = -\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{4+\frac{12}{n^4}}{\frac{1}{n^4}-5} = -\frac{4}{-5} = \frac{4}{5}.$$

  Når vi legger sammen disse, får vi

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \left(\frac{2n^3-13}{5n^3-4} - \frac{4n^4+12}{1-5n^4}\right) = \frac{2}{5}+\frac{4}{5} = \frac{6}{5}.$$

  Merknad: Her brukte vi regneregel (ii).

Før vi regner ut grenseverdien i e), viser vi at $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ ved å bruke Definisjon 4.3.1 fra boken. For ethvert tall $\epsilon > 0$, må vi finne en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|e^{-n}| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Velg en slik $\epsilon > 0$. Vi vet at $|e^{-n}| = e^{-n}$. Så vi vil finne en N slik at $e^{-n} < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Hvis vi lar N være et positivt heltall større enn $-\log(\epsilon)$, så vil $e^{-n} < e^{\log(\epsilon)} = \epsilon$ for alle $n \geq N$. Dermed har vi vist at $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$.

- e) Her er hverken teller eller nevner polynomer. Men vi vet at $\sin(n) \leq 1$ for alle n, og $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$, så vi prøver samme metode likevel.

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{n^5+2\sin(n)}{e^{-n}+6n^5} = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{1+\frac{2\sin(n)}{n^5}}{\frac{e^{-n}}{n^5}+6}.$$

Siden $\sin(n) \leq 1$, så vil $\frac{\sin(n)}{n^5}$ konvergere mot 0 når $n \to \infty$. Siden $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$, så må jo selvsagt også $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}}{n^5} = 0$. Dermed får vi at teller konvergerer mot 1, og nevner konvergerer mot 6. Det betyr at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 2\sin(n)}{e^{-n} + 6n^5} = \frac{1}{6}.$$

Oppgave (3). *Finn grenseverdiene:*

- *a)* $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$.
- *b)* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}}$.
- *d)* $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{1 + e^{-2n}} - e^{-n})$.

Løsning. Vi skal bruke samme triks som i Eksempel 4.3.8 fra boken.

- a) Her har vi en differanse av kvadratrøtter. Både $\sqrt{n+2}$ og $\sqrt{n}$ divergerer mot ∞ (se Eksempel 4.3.7), så dette er et såkalt "$\infty - \infty$"-uttrykk. Det er ikke klart hva det konvergerer mot. Men vi vil gange med den "konjugerte" av uttrykket som i Eksempel 4.3.8 fra boken. Den "konjugerte" av $(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ er $(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})$. Så vi får at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \quad \text{(her bruker vi } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2\text{)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2) - n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

  Her ser vi at nevner divergerer mot ∞. Teller er en positiv konstant, så dette betyr at uttrykket konvergerer mot 0. Med andre ord,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = 0.$$

- b) Igjen vil vi gange med den "konjugerte".

$$\lim_{\longrightarrow n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} = \lim_{\longrightarrow n \to \infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n})}$$
$$= \lim_{\longrightarrow n \to \infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+\sqrt{n}})^2-\sqrt{n}^2}$$
$$= \lim_{\longrightarrow n \to \infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{(n+\sqrt{n})-n}$$
$$= \lim_{\longrightarrow n \to \infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{\longrightarrow n \to \infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{\longrightarrow n \to \infty} \sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}}+1$$
$$= \lim_{\longrightarrow n \to \infty} \sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}}+1$$

Vi ser at $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, som konvergerer mot 0. Dermed vil $\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$ konvergere mot $\sqrt{1+0} = 1$. Til sammen får vi da at

$$\lim_{\longrightarrow n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} = \lim_{\longrightarrow n \to \infty} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1 = 1+1 = 2.$$

- d)

$$\lim_{\longrightarrow n \to \infty} (\sqrt{1+e^{-2n}}-e^{-n}) = \lim_{\longrightarrow n \to \infty} \frac{(\sqrt{1+e^{-2n}}-e^{-n})(\sqrt{1+e^{-2n}}+e^{-n})}{(\sqrt{1+e^{-2n}}+e^{-n})}$$
$$= \lim_{\longrightarrow n \to \infty} \frac{\sqrt{1+e^{-2n}}^2-(e^{-n})^2}{(\sqrt{1+e^{-2n}}+e^{-n})}$$
$$= \lim_{\longrightarrow n \to \infty} \frac{(1+e^{-2n})-e^{-2n}}{(\sqrt{1+e^{-2n}}+e^{-n})}$$
$$= \lim_{\longrightarrow n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2n}}+e^{-n})}$$

Vi vet at $\lim_{\longrightarrow n \to \infty} e^{-n} = 0$, og tilsvarende at $\lim_{\longrightarrow n \to \infty} e^{-2n} = 0$. Dermed vil $\lim_{\longrightarrow n \to \infty} \sqrt{1+e^{-2n}} = \sqrt{1+0} = 1$. Det betyr at grenseverdien til nevneren blir $\lim_{\longrightarrow n\to\infty}\sqrt{1+e^{-2n}}+e^{-n}=\sqrt{1+0}+0=1$. Til sammen får vi at

$$\lim_{\substack{\longrightarrow\\ n\to\infty}}(\sqrt{1+e^{-2n}}-e^{-n})=\lim_{\substack{\longrightarrow\\ n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2n}}+e^{-n})}=\frac{1}{1}=1.$$

Oppgave (4). *Vis at disse grenseverdiene er riktige ved bare å bruke definisjon 4.3.6.*

- *a)* $\lim_{\longrightarrow n\to\infty}(3-\frac{2}{n})=3$
- *b)* $\lim_{\longrightarrow n\to\infty}\frac{2\sin(n)}{n}=0$
- *c)* $\lim_{\longrightarrow n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2}=\frac{1}{3}$

Løsning. I disse oppgavene er vi gitt en følge $\{a_n\}$, som vi skal vise konvergerer mot en gitt verdi a. Per definisjon må vi da for enhver $\epsilon>0$ finne en $N\in\mathbb{N}$ slik at $|a_n-a|<\epsilon$ for alle $n\geq N$. I hver av oppgavene lar vi $\epsilon>0$ være gitt, og løsningen består da i å finne en slik N.

- a) Vi må finne en N slik at $|(3-\frac{2}{n})-3|<\epsilon$ for alle $n\geq N$. Det vil si $|\frac{2}{n}|<\epsilon$. Siden $\frac{2}{n}$ er positiv, er dette ekvivalent med $\frac{2}{n}<\epsilon$. Dette er ekvivalent med $\frac{n}{2}>\frac{1}{\epsilon}\Leftrightarrow n>\frac{2}{\epsilon}$. Så dersom vi velger N til å være et heltall større enn $\frac{2}{\epsilon}$, så er det klart at $n>\frac{2}{\epsilon}$ for alle $n\geq N$. Siden dette er ekvivalent med at $|\frac{2}{n}|<\epsilon$ for alle $n\geq N$, har vi vist resultatet.

- b) Vi vil finne en N slik at $|\frac{2\sin(n)}{n}|<\epsilon$ for alle $n\geq N$. Nå er $|\frac{2\sin(n)}{n}|=\frac{2|\sin(n)|}{n}$, så ulikheten blir $\frac{2|\sin(n)|}{n}<\epsilon$, som er ekvivalent med

  $$2|\sin(n)|<n\epsilon\Leftrightarrow n>\frac{2|\sin(n)|}{\epsilon}.$$

  Men vi vet at $|\sin(n)|\leq 1$ for alle n, så dersom vi velger N til å være et heltall større enn $\frac{2}{\epsilon}$, så vil $n>\frac{2}{\epsilon}\geq\frac{2|\sin(n)|}{\epsilon}$ for alle $n\geq N$. Men dette er ekvivalent med at $|\frac{2\sin(n)}{n}|<\epsilon$ for alle $n\geq N$, og vi er ferdige.

- c) Vi vil finne en N slik at $|\frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2}-\frac{1}{3}|<\epsilon$ for alle $n\geq N$. Vi regner litt på uttrykket til venstre.

$$
\begin{aligned}
|\frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2} - \frac{1}{3}| &= |\frac{3(n+\frac{1}{2})}{3(3n+2)} - \frac{3n+2}{3(3n+2)}| \\
&= |\frac{3(n+\frac{1}{2})}{3(3n+2)} - \frac{3n+2}{3(3n+2)}| \\
&= |\frac{(3n+\frac{3}{2})-(3n+2)}{3(3n+2)}| \\
&= |\frac{-\frac{1}{2}}{3(3n+2)}| \\
&= |-\frac{1}{6(3n+2)}| = \frac{1}{6(3n+2)}.
\end{aligned}
$$

Så ulikheten over er det samme som $\frac{1}{6(3n+2)} < \epsilon \Leftrightarrow 1 < \epsilon \cdot 6(3n+2)$. Men

$$
\epsilon \cdot 6(3n+2) > 1 \Leftrightarrow 3n+2 > \frac{1}{6\epsilon} \Leftrightarrow 3n > \frac{1}{6\epsilon} - 2 \Leftrightarrow n > \frac{\frac{1}{6\epsilon}-2}{3}.
$$

Så dersom vi velger N til å være et heltall større enn $\frac{\frac{1}{6\epsilon}-2}{3}$, så vil $n > \frac{\frac{1}{6\epsilon}-2}{3}$ for alle $n \geq N$, noe som er ekvivalent med at $|\frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2} - \frac{1}{3}| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Dermed er vi ferdige.

Oppgave (11). *Vis at dersom* $\underrightarrow{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underrightarrow{\lim}_{n\to\infty} b_n = A$ *og*

$$
a_n \leq c_n \leq b_n \text{ for alle } n,
$$

så er $\underrightarrow{\lim}_{n\to\infty} c_n = A$.

Løsning. Vi vil bruke definisjonen av konvergens. La $\epsilon > 0$. Vi vil finne en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|c_n - A| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Vi vet at følgene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konvergerer mot A. Dette betyr at det finnes et heltall N_1 slik at $|a_n - A| < \epsilon$ for alle $n \geq N_1$, og et heltall N_2 slik at $|b_n - A| < \epsilon$ for alle $n \geq N_2$. Skriver vi om dette, får vi at $-\epsilon < a_n - A < \epsilon$, som er ekvivalent med $A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$ for alle $n \geq N_1$. Tilsvarende er $A - \epsilon < b_n < A + \epsilon$ for alle $n \geq N_2$. La nå N være et heltall som er større eller lik både N_1 og N_2 (f.eks $N = \max\{N_1, N_2\}$). Da har vi at $c_n \leq b_n < A + \epsilon$ for alle $n \geq N$, men også at $A - \epsilon < a_n \leq c_n$ for alle $n \geq N$. Det betyr at $A - \epsilon < c_n < A + \epsilon$ for alle $n \geq N$. Dette medfører at $-\epsilon < c_n - A < \epsilon$, som betyr at $|c_n - A| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Per definisjon av konvergens, har vi nå vist at $\underrightarrow{\lim}_{n\to\infty} c_n = A$.

Oppgave (13). *Finn eksempler på følger* $\{a_n\}$ *og* $\{b_n\}$ *slik at* $\underrightarrow{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underrightarrow{\lim}_{n\to\infty} b_n = 0$ *og*

- *a)* $\underrightarrow{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$,

- *b)* $\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} = \infty$,
- *c)* $\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n}$ *er forskjellig fra* 0 *og* ∞.

Løsning.

- a) Vi velger $a_n = \frac{1}{n^2}$, og $b_n = \frac{1}{n}$. Da er det klart at $\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} a_n = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} b_n = 0$. Videre er

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{1}{n} = 0.$$

- b) Vi velger motsatt $a_n = \frac{1}{n}$, og $b_n = \frac{1}{n^2}$. Da er

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} n = \infty.$$

- Vi velger $a_n = b_n = \frac{1}{n}$. Da er

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} 1 = 1.$$

Oppgave (14). *Finn eksempler på følger* $\{a_n\}$ *og* $\{b_n\}$ *slik at* $\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} a_n = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} b_n = \infty$ *og*

- *a)* $\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} a_n - b_n = \infty$,
- *b)* $\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} a_n - b_n = -\infty$,
- *c)* $\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} a_n - b_n$ *er et endelig tall.*

Løsning.

- a) Vi velger $a_n = 2n$, og $b_n = n$. Da er det klart at $\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} a_n = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} b_n = \infty$. Videre er

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} a_n - b_n = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} 2n - n = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} n = \infty.$$

- b) Vi velger motsatt $a_n = n$, og $b_n = 2n$. Da er

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} a_n - b_n = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} n - 2n = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} -n = -\infty.$$

- Vi velger $a_n = b_n = n$. Da er

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} a_n - b_n = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} n - n = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} 0 = 0.$$

Oppgave (15). *Gjennomfør beviset for teorem 4.3.9 for avtagende følger.*

Løsning. Teoremet vi skal vise er det følgende: En monoton, begrenset følge er alltid konvergent. La $\{a_n\}$ være en slik følge. $\{a_n\}$ kan være monotont stigende eller monotont avtagende. I denne oppgaven antar vi at den er monotont avtagende. Betrakt følgen $b_n = -a_n$. Siden $\{a_n\}$ er begrenset, så finnes det en nedre skranke a. Det betyr at $a_n \geq a$ for alle heltall n. Dette betyr at $b_n = -a_n \leq -a$ for alle heltall n. Dermed har følgen $\{b_n\}$ en øvre skranke $-a$. Siden a_n er monotont synkende, så er b_n monotont stigende. Av teoremet som bevist i boken for stigende følger, er da $\{b_n\}$ konvergent. Det betyr at $\varinjlim_{n\to\infty} b_n = b$, for en eller annen grenseverdi b. Merk at $a_n = -b_n$. Av regneregel 4.3.3 (ii) har vi dermed at

$$\varinjlim_{n\to\infty} a_n = \varinjlim_{n\to\infty} -b_n = -b.$$

Dermed konvergerer $\{a_n\}$ mot $-b$, og er med andre ord en konvergent følge. Dette fullfører beviset.

Oppgave (18). *Definer rekursivt en følge $\{x_n\}$ ved $x_1 = 1$, og $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ for $n \geq 1$.*

- *a) Vis, ved induksjon på n, at $x_n < x_{n+1}$ for alle naturlige tall n.*
- *b) Vis at følgen $\{x_n\}$ konvergerer, og bestem grensen.*
- *c) Undersøk konvergensen av følgen $\{y_n\}$, definert ved $y_1 = 1$, og $y_{n+1} = \sqrt{2y_n + y_n^2}$ for $n \geq 1$.*

Løsning.

- a) Vi viser hypotesen først for $n = 1$. Vi må altså vise at $x_1 < x_2$. Men $x_2 = \sqrt{2x_1} = \sqrt{2}$ per definisjon, og $1 < \sqrt{2}$. Dermed holder ulikheten for $n = 1$. Anta nå ulikheten holder for $n = k$. Vi må vise at den gjelder for $n = k+1$. Vi vet altså at $x_k < x_{k+1}$, og skal vise at $x_{k+1} < x_{k+2}$. Vi vet også at $x_{k+2} = \sqrt{2x_{k+1}}$. Siden $x_{k+1} > x_k$, så er $\sqrt{2x_{k+1}} > \sqrt{2x_k} = x_{k+1}$. Dette betyr at $x_{k+2} = \sqrt{2x_{k+1}} > x_{k+1}$. Vi har dermed bevist induksjonstrinnet, og konkluderer med at $x_n < x_{n+1}$ for alle naturalige tall n.

- b) Av a) vet vi at følgen $\{x_n\}$ er monotont stigende. Hvis vi kan vise at den har en øvre skranke, så betyr det at den konvergerer av Teorem 4.3.9. Vi skal vise ved induksjon at 2 er en øvre skranke for følgen. Med andre ord skal vi vise at $x_n < 2$ for alle naturlige tall n. Siden $x_1 = 1$, så er dette sant for $n = 1$. Anta nå det er sant for $n = k$. Da er $x_k < 2$. Men det betyr at $x_{k+1} = \sqrt{2x_k} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$. Altså er $x_{k+1} < 2$, og induksjonstrinnet er bevist. Altså har x_n en øvre skranke, og vil dermed konvergere.

  For å bestemme grensen, så bruker vi samme metoden som i Eksempel 4.3.10 i boken. La x være grensen, det vil si $\varinjlim_{n\to\infty} x_n = x$. Da er

  $$\varinjlim_{n\to\infty} x_{n+1} = \varinjlim_{n\to\infty} \sqrt{2x_n} = \sqrt{2x}.$$

Men det er klart at $\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} x_{n+1} = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} x_n = x$, så vi får likningen $x = \sqrt{2x}$. Kvadrerer vi får vi at $x^2 = 2x \Rightarrow x(x-2) = 0$. Så $x = 0$ eller $x = 2$. Men $x_1 = 1$, og følgen er stigende, og det betyr at $x \geq 1$. Vi står igjen med løsningen $x = 2$, og vi konkluderer med at $\{x_n\}$ konvergerer mot 2.

- c) Vi skal vise at følgen $\{y_n\}$ konvergerer mot ∞. Grunnen til at vi mistenker dette, er det følgende. Anta at følgen konvergerer mot et tall y. Av samme metode som i b), vil vi da bestemme y på følgende måte.

$$\lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} y_{n+1} = \lim_{\overrightarrow{n\to\infty}} \sqrt{2y_n + y_n^2} = \sqrt{2y + y^2}.$$

Vi får da likningen $y = \sqrt{2y + y^2} \Rightarrow y^2 = 2y + y^2 \Rightarrow 0 = 2y \Rightarrow y = 0$. Men vi kan vise at følgen er stigende ved induksjon. Vi skal altså vise at $y_{n+1} > y_n$ for alle naturlige tall n. Per definisjon er $y_2 = \sqrt{2y_1 + y_1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$, så ulikheten gjelder for $n = 1$, siden $\sqrt{3} > 1$. Anta nå at ulikheten gjelder for $n = k$. Da vet vi at $y_{k+1} > y_k$. Men $y_{k+2} = \sqrt{2y_{k+1} + y_{k+1}^2} > \sqrt{2y_k + y_k^2} = y_{k+1}$. Altså er $y_{k+2} > y_{k+1}$, og induksjonstrinnet er vist. Vi konkluderer med at $y_{n+1} > y_n$ for alle naturlige tall n. Altså er følgen stigende. Siden følgen ikke konvergerer, så har den ingen øvre skranke. Dette betyr at følgen vokser ubegrenset. Vi viser at følgen konvergerer mot ∞ ved å bruke Definisjon 4.3.6. La $c \in \mathbb{R}$ være et hvilket som helst tall. Vi må finne et heltall N slik at $|y_n| \geq c$ for alle $n \geq N$. Siden følgen vokser ubegrenset, så finnes det nemlig et tall N slik at $y_N \geq c$. Men siden følgen er monotont stigende, vet vi at $y_n \geq y_N \geq c$ for alle heltall $n \geq N$. Siden y_n alltid er et positivt tall, får vi at $|y_n| = y_n \geq c$ for alle $n \geq N$. Vi har altså vist at $\{y_n\}$ konvergerer mot ∞.

Midtveiseksamen Mat 1100 12. oktober 2012

Oppgave (1). *Det komplekse tallet $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ kan skrives som: C) $4e^{\frac{5\pi}{3}i}$.*

Løsning. Vi finner først modulusen til z. $|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$. Vi skriver

$$z = 4(\frac{2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}i) = 4(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}2}{i}).$$

Ved å tegne punktet $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}2}{i}$ på enhetssirkelen ser vi at argumentet må være $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Svaret er altså C).

Oppgave (2). *Det komplekse tallet z som har polarkoordinatene $r = \sqrt{2}$ og $\theta = \frac{7\pi}{2}$ kan skrives som A) $z = -i\sqrt{2}$.*

Løsning. Av de'Moivres formel har vi at

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{2} + i\sin\frac{7\pi}{2})$$

Merk at $\frac{7\pi}{2} = 2\pi + \frac{3\pi}{2}$. Siden cos og sin har periode 2π, får vi at

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = \sqrt{2}(0 - i\cdot 1) = -\sqrt{2}i.$$

Svaret er altså A).

Oppgave (3). *Hvilket av følgende komplekse tall er en rot i polynomet $P(z) = z^3 - 4z^2 + 5z$. Svar: B) $z = 2 - i$.*

Løsning. Vi faktoriserer $P(z)$ som følger. $P(z) = z(z^2 - 4z + 5)$. Da ser vi at $z = 0$ er en rot, men dette er ikke et av alternativene. Da må vi se på røttene til $z^2 - 4z + 5$. Vi bruker abc-formelen og finner at røttene er gitt ved

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Spesielt er $z = 2 - i$ en rot, så svaret er B).

Oppgave (13). *Hvilket av følgende tall er en tredjerot til det komplekse tallet $z = -4\sqrt{3} - 4i$. Svar: E) $2e^{i\frac{7\pi}{18}}$.*

Løsning. Vi vil skrive z på formen $re^{i\theta}$. Vi må først finne modulusen r. $r = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{16\cdot 3 + 16} = \sqrt{64} = 8$. Vi kan da skrives

$$z = 8(\frac{-4\sqrt{3}}{8} - \frac{4}{8}i) = 8(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i).$$

Ved å tegne punktet $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ på enhetssirkelen ser vi at argumentet må være $\theta = \frac{7\pi}{6}$. Altså er $z = 8e^{i\frac{7\pi}{6}}$. For å finne tredjerøttene skriver vi $z = 8e^{i\frac{7\pi}{6} + 2\pi ki}$ for heltall k. Da er

$$z^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\frac{7\pi}{6} + 2\pi ki}{3}} = 2e^{i\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi ki}{3}}.$$

Vi setter inn for $k = 0, 1, 2$ og får at tredjerøttene blir

$$w_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{18}}$$

$$w_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi i}{3}}$$

$$w_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{18} + \frac{4\pi i}{3}}$$

Vi ser at w_1 samsvarer med E), og dette blir da svaret.