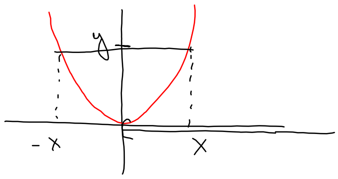
Omvendte funksjoner

Definisjon: Den omvendte funksjonen til en funksjon f betegnes ofte med f^{-1}. $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$

Merk: $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = f(x)^{-1}$

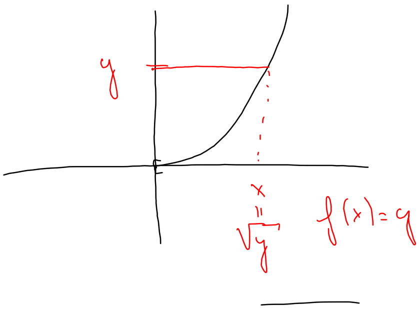
$f(x)=x^2$ er ikke injektiv.



Innskrenker definisjonsmengden:

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

f er injektiv, og den omvendte funksjonen er $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$

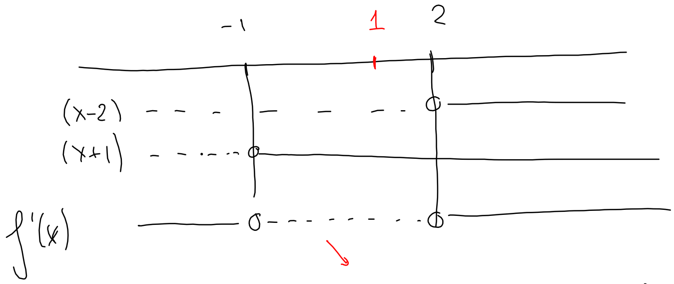


Eksempel: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ $x=1$

Finn et område rundt $x=1$ der f er injektiv.

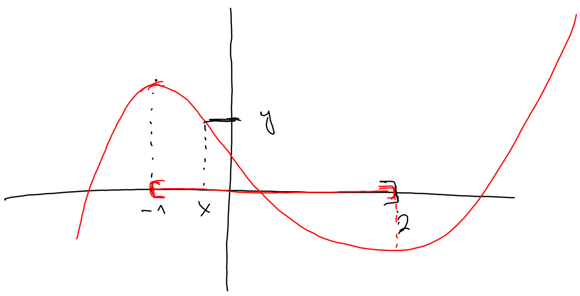
Drøfter fortegnet til den deriverte:

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x-2)(x+1)$$



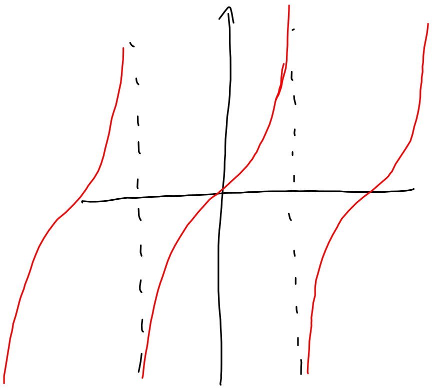
f er avtagende (og dermed injektiv) i intervallet $[-1,2]$

f restriktert til intervallet $[-1,2]$ har dermed en omvendt funksjon



Cotangens (funksjonen studentene alltid glemte)

Husk: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$



$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

Definisjon: Cotangens er funksjon definert ved:

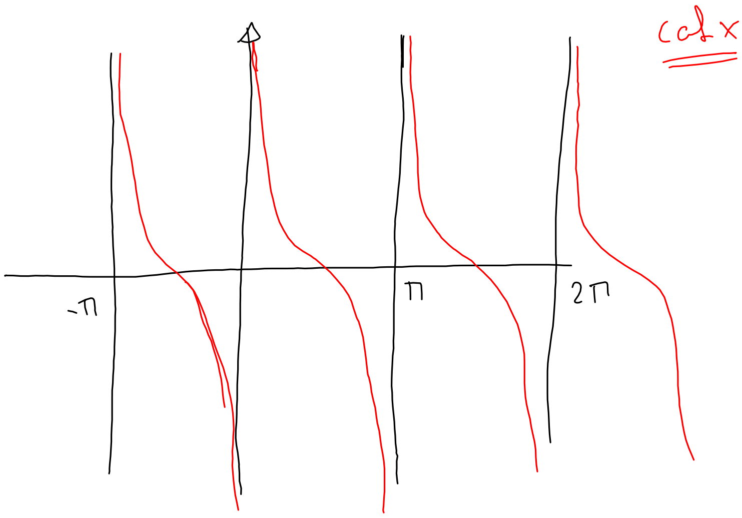
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad (\cot x)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \begin{cases} -1 - \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x = -(1 + \cot^2 x) \\[2ex] = \dfrac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \end{cases}$$

Oppsummerer: $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

Dermed

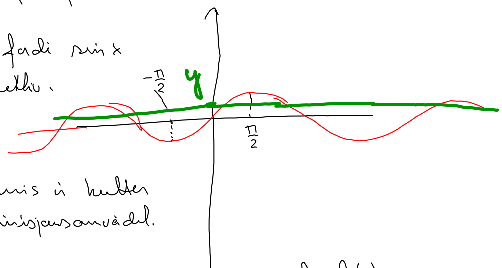
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$



Arcusfunksjonene

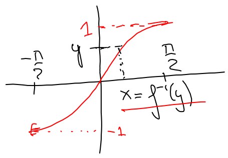
Hva er den omvendte funksjonen til $\sin x$?

Lett svar: Finnes ikke fordi $\sin x$ ikke er injektiv.



Komplisert svar: Hva hvis vi kutter ved definisjonsområdet.

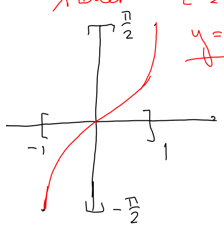
Definisjon: La $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ være definert ved $f(x) = \sin x$.



Da er f en voksende funksjon og den omvendte funksjonen $f^{-1}: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kalles for arcussinus og betegnes med

$$f^{-1}(x) = \arcsin x = \sin^{-1}(x)$$

Alternativt: $x = \arcsin(y)$ dersom x er det eneste tallet i $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ slik at $y = \sin x$



x	$\sin x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1

x	$\arcsin x$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{2}$

Hva er den deriverte til arcsin?

Hvis g er den omvendte funksjonen til f, så

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{der } y = f(x).$$

$$[\arcsin(y)]' = \frac{1}{(\sin(x))'} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\boxed{y = \sin x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

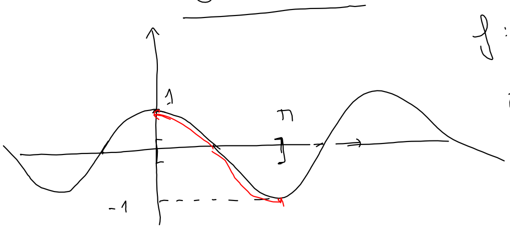
Følgelig: $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Altså: $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

Eksempel: Deriver $f(x) = \arcsin(e^x)$ $\qquad D\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

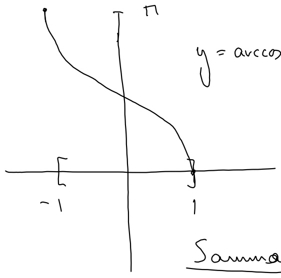
Kjerneregel: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^x = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

Arccosinus:



$f: [0,\pi] \to [-1,1]$ definert ved $f(x) = \cos x$ er injektiv og har en omvendt funksjon

$f^{-1}(x) = \arccos x = \cos^{-1}(x)$



$f^{-1}: [-1,1] \to [0,\pi]$

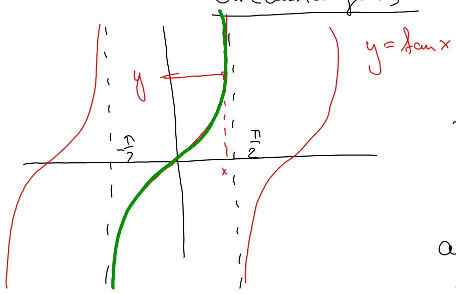
Derivasjon:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sammenheng:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

Arcustangens

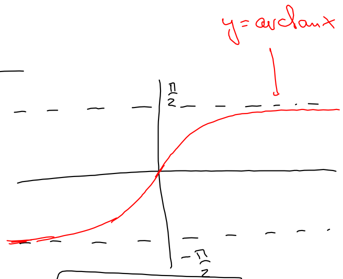


La $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ være definert ved $f(x) = \tan x$

Da har f en omvendt funksjon $f^{-1}: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ som kalles arcustangens og som betegnes ved $f^{-1}(x) = \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$

x	$\tan x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\to \frac{\pi}{2}$	$\tan x \to \infty$

x	$\arctan x$
0	0
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$x \to \infty$	$\to \frac{\pi}{2}$



Derivasjon: $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ der $y = f(x)$

$f(x) = \tan x$
$g(y) = \arctan y$
$\underbrace{\quad}_{y = \tan x}$

$$(\arctan(y))' = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

Setning. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

Eksempel: $f(x) = \arctan\sqrt{x}$ $\qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

Eksempel:

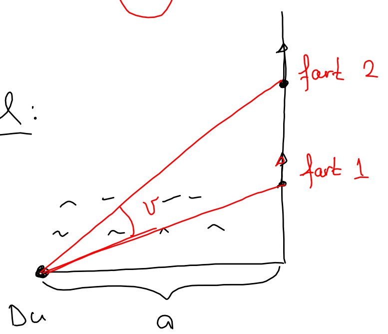
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \underline{\underline{1}}$$

Eksempel:

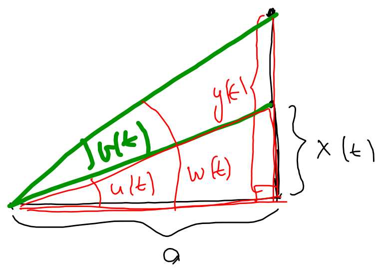
$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty}\Big(\overbrace{\frac{\pi}{2}-\arctan x}^{\to 0}\Big) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x} = \underline{\underline{1}}$$

Eksempel:



Regner ut v'



Trenger en sammenheng mellom v, x og y.

$\tan u(t) = \frac{x(t)}{a}$ $\qquad v(t) = w(t) - u(t)$

$\tan w(t) = \frac{y(t)}{a}$ $\qquad = \arctan\frac{y(t)}{a} - \arctan\frac{x(t)}{a}$

$u(t) = \arctan\frac{x(t)}{a}$

$w(t) = \arctan\frac{y(t)}{a}$

Deriverer:

$$v'(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{y(t)}{a}\right)^2}\,\frac{y'(t)}{a} - \frac{1}{1+\left(\frac{x(t)}{a}\right)^2}\,\frac{x'(t)}{a}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{y(t)^2}{a^2}}\,\frac{a\,y'(t)}{a^2} - \frac{1}{1+\frac{x(t)^2}{a^2}}\,\frac{a\,x'(t)}{a^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{a\,y'(t)}{a^2+y(t)^2} - \frac{a\,x'(t)}{a^2+x(t)^2}}}$$