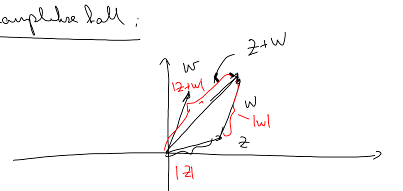
En liten rest av komplekse tall:

Trekantulikhet:

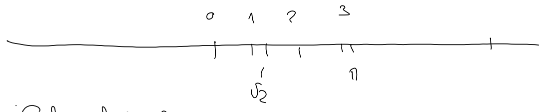
$|z+w| \le |z| + |w|$



Farvel med komplekse tall - for en stund — Sees igjen med studien → MAT-INF 1100

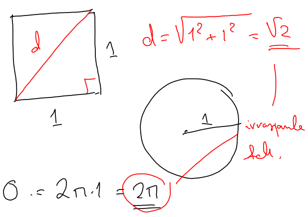
Reelle tall (2.3)

Kompletthetsprinsippel:



Grekerne trodde lenge at de kunne greie seg med de rasjonale tallene, $\frac{a}{b}$ der a, b er hele tall.

$\sqrt{2}$ er ikke rasjonalt tall.



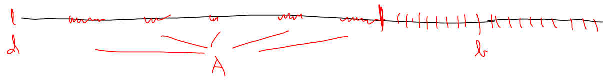
$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$O = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$

Kompletthetsprinsippel sørger for at vi ikke får hlovannende avvarsheter med de reelle tallene.

Definisjon: En delmengde A av de reelle tall kalles oppad begrenset dersom det finnes et tall b slik at $b \ge a$ for alle $a \in A$.

< minste övre skranke!

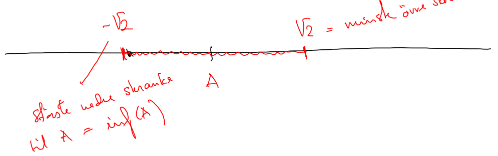


A kalles nedad begrenset dersom det finnes et tall d slik at $d \le a$ for alle $a \in A$.

Vi kaller b en övre skranke for A og d for en nedre skranke

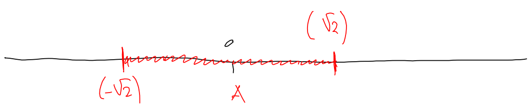
Kompletthetsprinsippel: Enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde av $\mathbb{R}$ har en minste övre skranke. Denne kalles også supremum til A og betegnes med $\sup A$

Eksempel: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$



Hva hvis vi bare spilt med rasjonale tall?

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$



Følger (4.3)

En følge er en uendelig sekvens av tall:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\ldots$ Forkortet skrivemåte $\{a_n\}$

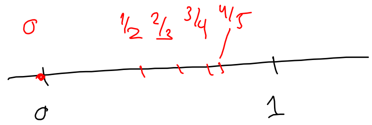
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Eksempel: a) $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\ldots$ følgen av alle kvadrattall

$\{n^2\}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\ldots$ $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$

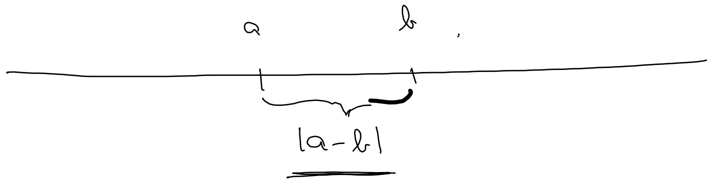
Konvergens av følger



Ser vel som $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Hva skal det betyr at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$?

Innledning: Når du ser et uttrykk av typen $|a-b|$, skal du tenke på avstanden mellom a og b.



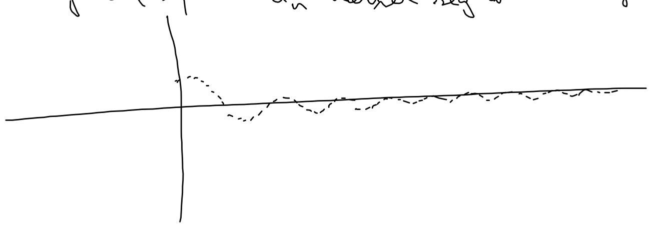
Hva betyr det at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$?

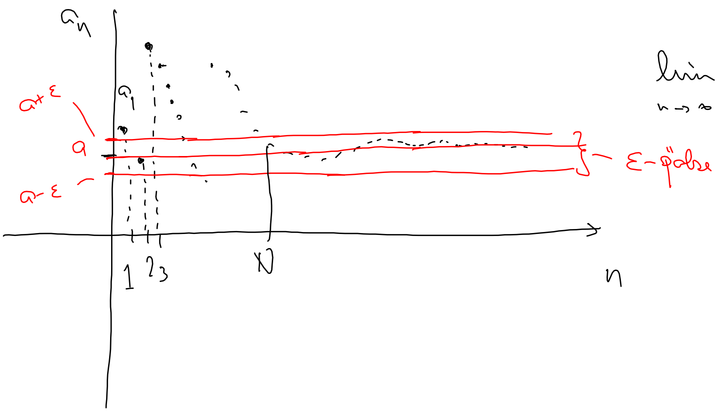
Uformell svar: Vi kan få $\overbrace{a_n \text{ så nær } a \text{ vi ønsker}}^{|a_n - a| < \varepsilon}$ ved å gå tilstrekkelig langt ut i følgen.

Formell svar: For enhver $\varepsilon > 0$ finnes det en N slik at når $n \geq N$ så

$|a_n - a| < \varepsilon$.

(Annen mulig definisjon: a_n nærmer seg a når n går mot uendelig)





$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Eksempel: Bruk definisjonen til å vise at $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Gitt en $\varepsilon > 0$, må vi vise at det finnes en N slik at

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{når } n \geq N.$$

Vi har

$$\left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

For å få $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$, må vi altså ha $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Big| \frac{n+1}{\varepsilon}$

dvs $\frac{1}{\varepsilon} < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$.

Regler for grenseverdier: Anta at $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Da

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ forutsatt at $B \neq 0$.

Eksempel: $$\lim_{n\to\infty} \frac{7 - \frac{3}{n^2}}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{7}{4}$$

$\frac{3}{n^2} \to 0$, $\frac{2}{n} \to 0$

Formelt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7 - \frac{3}{n^2}}{4 + \frac{2}{n}} \overset{(iv)}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}\left(7 - \frac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(4 + \frac{2}{n}\right)} \overset{(ii)}{\underset{(i)}{=}} \frac{\overbrace{\lim_{n\to\infty} 7}^{=7} - \overbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}^{=0}}{\underbrace{\lim_{n\to\infty} 4}_{4} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}}_{0}} = \frac{7-0}{4+0} = \frac{7}{4}$$

Bevis for regel 1: $\lim (a_n + b_n) = A + B$

Vet at $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

—||— $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

Skal vise: $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

Gitt en $\varepsilon > 0$, må vi vise at det finnes en N slik at

$$|(a_n + b_n) - (A+B)| < \varepsilon \quad \text{når} \quad n \geq N.$$

trekantulikhet

Vi har

$$|(a_n + b_n) - (A+B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$$

Siden $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, så finnes det et tall N_1 slik at når $n \geq N_1$, så $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Siden $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, så finnes det et tall N_2 slik at hvis $n \geq N_2$, så er $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. La $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Hvis $n \geq N$, så er da

$$|(a_n + b_n) - (A+B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Regneregler for grenseverdier (ε-fri sone)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^4+3n^2-2}{4n-3+4n^4} = \lim \frac{\cancel{n^4}\left(7+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^4}\right)}{\cancel{n^4}\left(\frac{4}{n^3}-\frac{3}{n^4}+4\right)} = \lim \frac{7+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^4}}{\frac{4}{n^3}-\frac{3}{n^4}+4} = \underline{\underline{\frac{7}{4}}}$$

$\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^4} \to 0$

$\frac{4}{n^3}-\frac{3}{n^4} \to 0$

Triks: Faktoriser ut høyeste potens i teller og nevner.

$$n\sqrt{1+\frac{3}{n}} - n = n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right)$$

Eksempel:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+3n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}}+n} = \lim \frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$