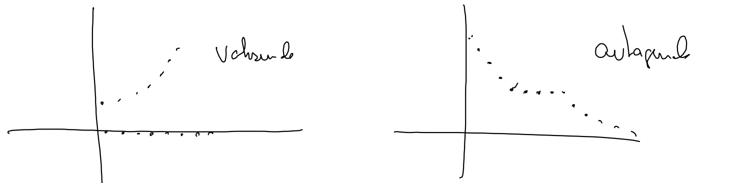
Følger

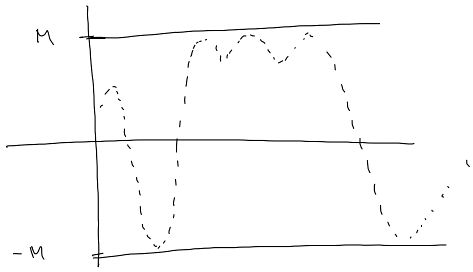
En følge $\{a_n\}$ er <u>voksende</u> dersom $a_{n+1} \geq a_n$ for alle n.

— " — <u>avtagende</u> dersom $a_{n+1} \leq a_n$ — " —

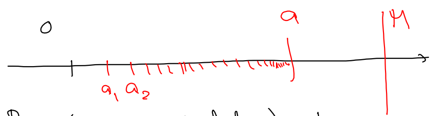


En følge er <u>monoton</u> dersom den er enten voksende eller avtagende.

— " — $\{a_n\}$ er <u>begrenset</u> dersom det finnes et tall M slik at $|a_n| \leq M$ for alle n.



<u>Teorem</u>: Enhver begrenset, monoton følge konvergerer.



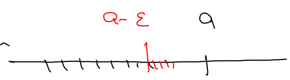
<u>Bevis</u> (for voksende følger): La

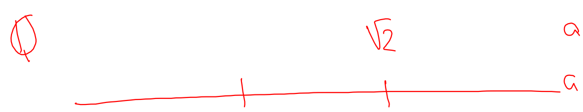
$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Da er A en ikke-tom, begrenset mengde. Ifølge kompletthetsprinsippet har A en minste øvre skranke a. Vi ønsker å vise at $\{a_n\}$ konvergerer mot a. For enhver $\varepsilon > 0$ må vi vise at det finnes en N slik at når $n \geq N$, så er $|a_n - a| < \varepsilon$. Siden $a_n \leq a$, så er det nok å vise at $a_n > a - \varepsilon$.

Siden a er den minste øvre skranken til A, så er $a-\varepsilon$ <u>ikke</u> en øvre skranke. Dermed finnes det et element i A, a_N, slik at $a_N > a - \varepsilon$. Siden $\{a_n\}$ er voksende, er dermed $a_n > a - \varepsilon$ for alle $n \geq N$. $\square$ HURRA!

QED





$a_1 = 1.4 = \frac{14}{10}$

$a_2 = 1.41 = \frac{141}{100}$

$a_3 = 1.414 = \frac{1414}{1000}$

$\vdots$

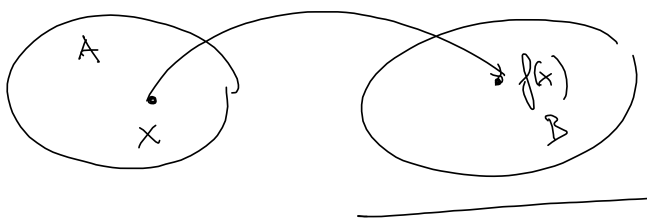
Funksjoner

Hva er en funksjon? $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^4+2}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{når } x < 0 \\ e^x & \text{når } x \geq 0 \end{cases}$$ delt forskrift.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } x \text{ er et rasjonalt tall} \\ 0 & \text{når } x \text{ er et irrasjonalt tall} \end{cases}$$

Anta at vi har to mengder A og B. En funksjon fra A til B er en regel/tilordning som til hver $x \in A$ tilordner et element $f(x) \in B$.



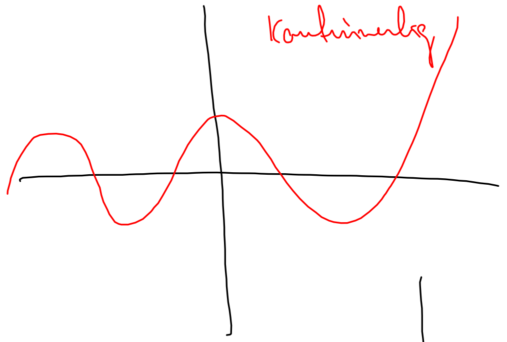
I kalkulus: Funksjoner definert på delmengder A av $\mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

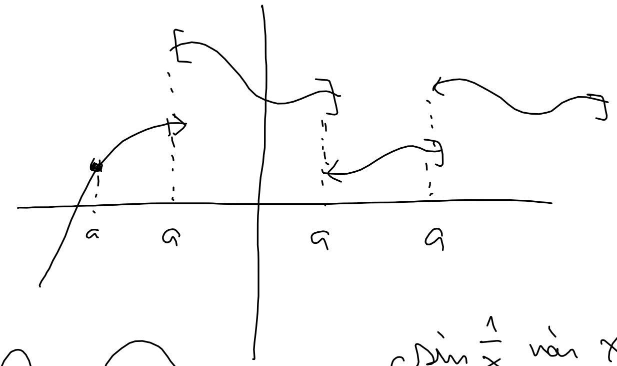
$f(x) = \ln(x)$ $x > 0$ definisjonsmengde $D_f = \{x : x > 0\}$.

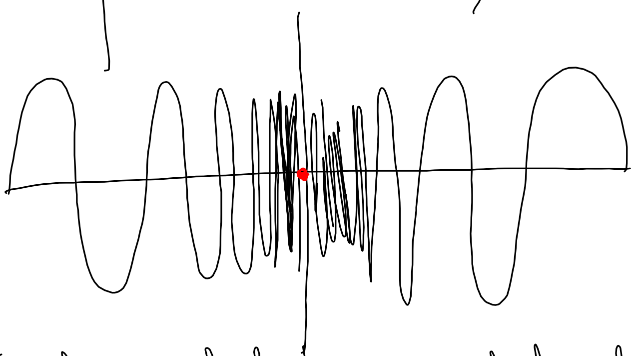
Kontinuitet.

Hva betyr det at en funksjon er kontinuerlig?

Intuitivt: Funksjonsgrafen er sammenhengende, ingen hopp.







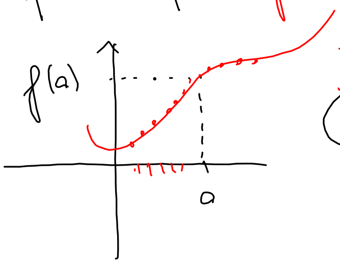
$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \text{når } x\neq 0\\ 0 & \text{når } x=0.\end{cases}$$

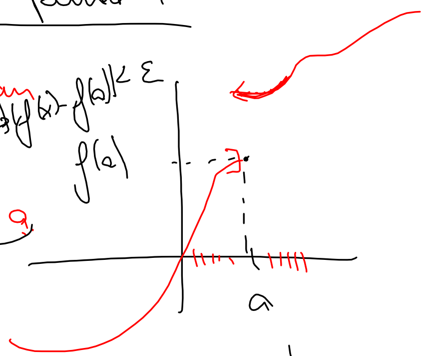
Hva vil det si at funksjonen er kontinuerlig i et punkt a?

Uformelt forsøk: f er kontinuerlig i a dersom jeg kan få f(x) så nær f(a) jeg ønsker ved å velge x nær nok a.

$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

$|x-a|<\delta$

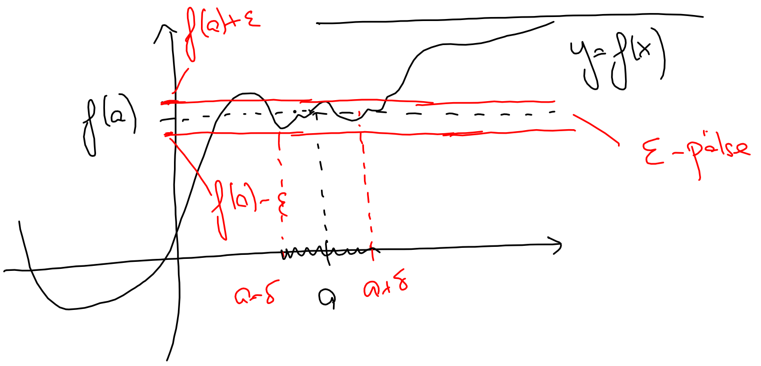


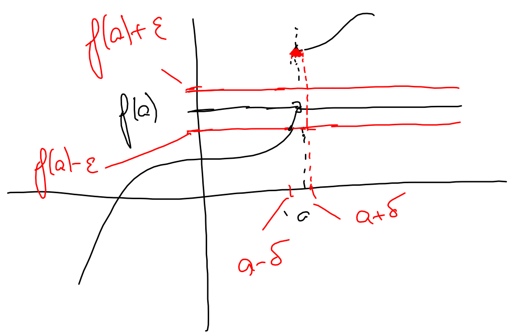


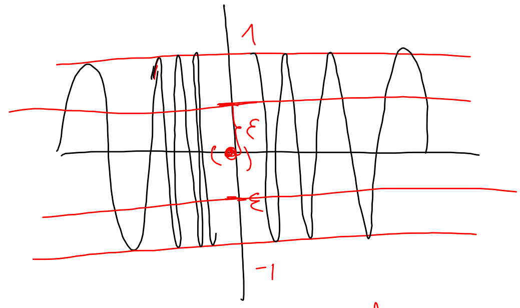
ε - epsilon

δ - delta

Formell definisjon: f er kontinuerlig i a dersom det for enhver $\varepsilon>0$ finnes en $\delta>0$ slik at når $|x-a|<\delta$, så $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.







$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

For enhver $\varepsilon > 0$ finnes det en $\delta > 0$ slik at når $\underbrace{|x-a| < \delta}_{\text{kan kontrollere}}$, så er $\underbrace{|f(x)-f(a)| < \varepsilon}_{\text{dette må gå bra}}$

$h = x - a \Rightarrow x = a + h$

$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon$

Eksempel: Vis $f(x) = 7x + 2$ er kontinuerlig i et punkt a.

Gitt $\varepsilon > 0$, må vi finne en $\delta > 0$ slik at når $|\underbrace{x-a}_{h}| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Hvis $h = x - a$, ser vi at $x = a + h$ og dermed

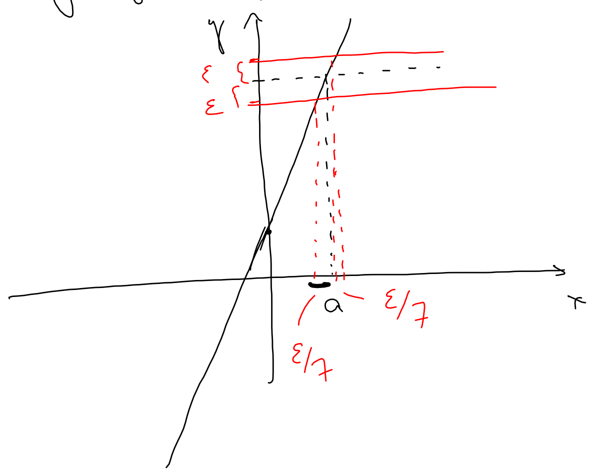
$$|f(x) - f(a)| = |f(a+h) - f(a)| = |\underbrace{(7(a+h)+2)}_{f(a+h)} - \underbrace{(7a+2)}_{f(a)}|$$

$$= |\cancel{7a} + 7h + \cancel{2} - \cancel{7a} - \cancel{2}| = |7h| = 7|h|$$ ← hvordan får jeg denne mindre enn ε. Nok å få $|h| < \frac{\varepsilon}{7}$.

Velger $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$. Må sjekke at hvis $|x - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{7}$, så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Anta $|h| = |x - a| < \frac{\varepsilon}{7}$. Da er

$$|f(x) - f(a)| = |f(a+h) - f(a)| = 7|h| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \underline{\underline{\varepsilon}}.$$



$f(x) = 7x + 2$

Teorem: Hvis f og g er kontinuerlig i et punkt a, så er $f+g$, $f-g$ og fg også kontinuerlig i a. Det samme gjelder $\frac{f}{g}$ forutsatt at $g(a) \neq 0$.

Teorem: Funksjonene $x^n, e^x, \ln x, \sin x, \cos x$ er kontinuerlig i for alle x i definisjonsområdet.

Eksempel: $f(x) = \frac{e^x + x^2}{2 + \sin x}$ er kontinuerlig i alle punkter.

e^x, x^2 er kontinuerlige $\Rightarrow e^x + x^2$ kontinuerlige
$2, \sin x$ —— " —— $\Rightarrow 2 + \sin x$ kontinuerlig
$\Rightarrow \frac{e^x + x^2}{2 + \sin x}$ kontinuerlig

Hva med $f(x) = \sin(x^2)$?

Teorem: Hvis f og g er kontinuerlige, så er

$h(x) = f(g(x))$ også kontinuerlig der den er definert.

Intuisjon om kontinuitet: Når $x \to a$, så $f(x) \to f(a)$.

Teorem: Følgende ekvivalent:

(i) f er kontinuerlig i a

(ii) For alle følger $\{x_n\}$ som konvergerer mot a, så konvergerer $\{f(x_n)\}$ mot $f(a)$.

Bevis: Anta at f er kontinuerlig i a. Vi skal vise at hvis $x_n \to a$, så vil $f(x_n) \to f(a)$. Gitt en $\varepsilon > 0$, må vi finne en N slik at når $n \geq N$, så er $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Siden f er kontinuerlig i a, finnes det en $\delta > 0$ slik at når $|x-a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Siden $x_n \to a$, finnes det en N slik at når $n \geq N$, så er $|x_n - a| < \delta$. Hvis $n \geq N$, så er altså $|x_n - a| < \delta$ og dermed er $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$.

Burde også vise at når (i) ikke er oppfylt, så finnes det en følge $x_n \to a$ slik at $f(x_n) \not\to f(a)$.

Men dette er vel beskrevet i læreboka.