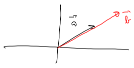
n-tupler



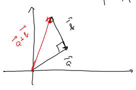
$\vec{a} = t\vec{b}$

$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

2 dimensjoner	3 dimensjoner	n dimensjoner.
$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$		Anta at $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ er to n-tupler.
$\vec{a}, \vec{b}$ er parallelle dersom det finnes et tall t slik at $\vec{a} = t\vec{b}$	$\vec{a}, \vec{b}$ parallelle	Vi sier at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle dersom det finnes et tall t slik at $\vec{a} = t\vec{b}$.
$\vec{a}, \vec{b}$ står normalt på hverandre dersom $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$\vec{a}, \vec{b}$ står normalt . . .	Vi sier at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står normalt på hverandre dersom $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
Lengden til vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2)$ er $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	Lengden til vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ er $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	Lengden til $\vec{a}$ er $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$.

Pytagoras for n-tupler: Anta at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er to n-tupler som står normalt på hverandre. Da er

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$$

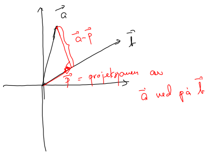


Stilrent triks: $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

Nyttig fordi skalarproduktet er lett å regne med, lengde er det ikke.

Bevis for Pytagoras: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{0} + \underbrace{\vec{b} \cdot \vec{a}}_{0} + \vec{b} \cdot \vec{b}$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2.$$



$\vec{p}$ er en vektor parallell med $\vec{b}$ slik at $\vec{a} - \vec{p}$ står normalt på $\vec{b}$.

Med andre ord: $\vec{p}$ er en vektor på formen $\vec{p} = t\vec{b}$ slik at $(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{b} = 0$

Dette betyr at vi må finne t slik at

$$(\vec{a} - t\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$$

dvs

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - t\,\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = t\,|\vec{b}|^2 \Rightarrow t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

Dermed er $\vec{p} = t\vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}$

Setning: Projeksjonen av $\vec{a}$ ned på $\vec{b}$ er gitt ved

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}$$

Lengden til projeksjonen er $|\vec{p}| = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$

Bevis for lengden: Generelt om lengder: $|c\vec{a}| = |(ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)|$

$$= \sqrt{c^2a_1^2 + c^2a_2^2 + \cdots + c^2a_n^2}$$

$$= \sqrt{c^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}$$

$$= |c|\,|\vec{a}|$$

c

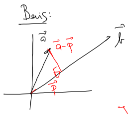
$$|\vec{p}| = \left|\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}\right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|^{\cancel{2}}}\cancel{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Schwarz' ulikhet: Hvis $\vec{a}, \vec{b}$ er n-tupler, så

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

OBS

Bevis:



Bruker Pytagoras

$$|\vec{a} - \vec{p}|^2 + |\vec{p}|^2 = |\vec{a}|^2$$

dvs

$$|\vec{p}|^2 \leq |\vec{a}|^2$$

Ifølge forrige resultat, så er $|\vec{p}| = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$

Dermed

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \leq |\vec{a}|^2 \quad \Big|\; |\vec{b}|^2$$

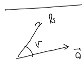
så

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 = (|\vec{a}|\,|\vec{b}|)^2$$

Som gir

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|.$$

Er dette så rart da? I to og tre dimensjoner er



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos v \Longrightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \cos v$$

Nå går vi baklengs: Har vist at $\dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \leq 1$, dvs

$$-1 \leq \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \leq 1$$

Definisjon: Vinkelen v mellom to n-tupler $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er den vinkelen mellom 0 og π slik at

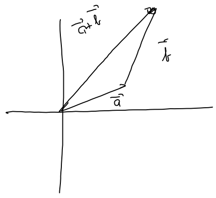
$$\cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|},$$

dvs

$$v = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

Trekantulikheten: Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er to n-tupler

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$$



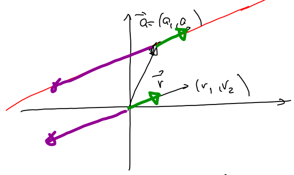
Bevis:
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$
$$\le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$$
$$= \left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)^2$$

Altså

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 \le (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$$

som betyr at $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$. ■

Hvordan kan vi beskrive en rett linje i 2 eller 3 dimensjoner?



Finn linjen gjennom $\vec{a}=(a_1,a_2)$ og parallell med vektoren $\vec{r}=(r_1,r_2)$

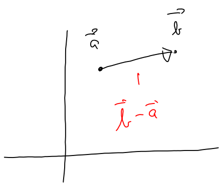
$$\vec{a} + t\vec{r}$$

Punktene på den rette linjen gjennom $\vec{a}$ med retning $\vec{r}$ er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{r} \qquad \text{parameterfremstilling.}$$

Definisjon: Anta at $\vec{a}$ og $\vec{r}$ er to n-tupler. Den rette linjen gjennom $\vec{a}$ med retning $\vec{r}$ består av punktene $\vec{a}+t\vec{r}$ der $t\in\mathbb{R}$.

Eksempel: Finn ligningen til den rette linjen gjennom $\vec{a}=(1,-4,2,3)$ og $\vec{b}=(1,2,0,-1)$



$\vec{r}=\vec{b}-\vec{a}$ er en retningsvektor for denne linjen og

$$\vec{r} = \vec{b}-\vec{a} = (1,2,0,-1)-(1,-4,2,3)$$
$$= (0,6,-2,-4)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{a}+t\vec{r} = (1,-4,2,3) + t(0,6,-2,-4)$$

$$= (1,\,-4+6t,\,2-2t,\,3-4t)$$

Ligger punktet $(1,-2,3,0)$ på denne linjen? Må undersøke om det finnes en t slik at

$$(1,-4+6t,2-2t,3-4t) = (1,-2,3,0)$$

dvs $1=1$

$-4+6t=-2 \Rightarrow -4+\cancel{6}^{3}\cdot\frac{3}{\cancel{4}_{2}} = -4+\frac{9}{2} = \frac{1}{2} \neq -2$

$2-2t=3$

$3-4t=0 \Rightarrow t=\frac{3}{4}$

Ingen felles løsning t, så punktet ligger ikke på linjen.

Komplekse n-tupler

Et komplekst n-tuppel: $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ der $z_1, z_2, \dots z_n \in \mathbb{C}$.

$(1+i, -i, \pi, 2-3i\sqrt{2})$ komplekst 4-tuppel:

Addisjon: $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$

Subtraksjon $\vec{z} + \vec{w} = (z_1+w_1, z_2+w_2, \dots, z_n+w_n)$

$\vec{z} - \vec{w} = (z_1-w_1, z_2-w_2, \dots, z_n-w_n)$

$c\vec{z} = (cz_1, cz_2, \dots, cz_n)$ $c \in \mathbb{C}$.

Lengden: $|\vec{z}| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}$

Skalarprodukt: $\vec{z} \cdot \vec{w} = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \dots + z_n\overline{w_n}$

Dette gir: $|\vec{z}|^2 = \vec{z} \cdot \vec{z}$ fordi

$z\overline{z} = |z|^2$

$\vec{z} \cdot \vec{z} = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + \dots + z_n\overline{z_n}$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2$

$= |\vec{z}|^2$

$(a+ib)(a-ib)$

$= a^2 + b^2 = |z|^2$

$(c\vec{z}) \cdot \vec{w} = c(\vec{z} \cdot \vec{w})$

$\vec{z} \cdot (c\vec{w}) = \overline{c}\,(\vec{z} \cdot \vec{w})$

konjugert.