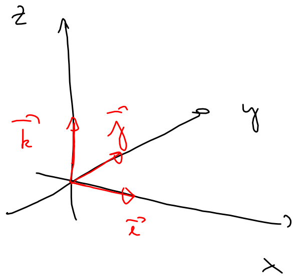
Kryssprodukt / vektorprodukt

Bare i $\mathbb{R}^3$

Notasjon:
$\vec{i} = (1,0,0)$
$\vec{j} = (0,1,0)$
$\vec{k} = (0,0,1)$

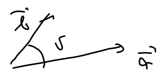


$$(a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

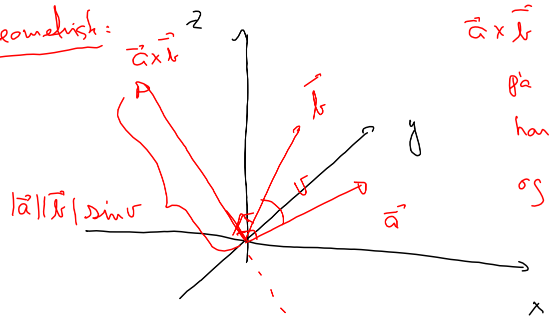
Kryssprodukt: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Algebraisk:
$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

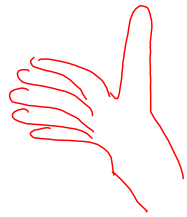
Skalarprodukt
Algebraisk: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
Geometrisk: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos v$



Geometrisk:



$\vec{a}\times\vec{b}$ står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$, har lengde $|\vec{a}||\vec{b}|\sin v$, og har retning bestemt av høyrehånds-regelen.



Huskeregel:

$$\begin{array}{cccccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

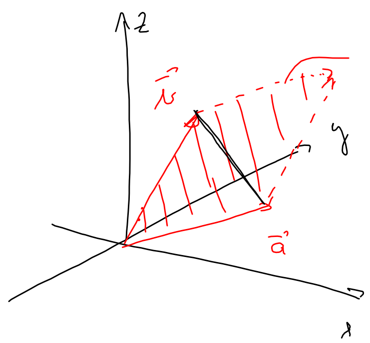
Eksempel: Finn en vektor som står normalt på både
$\vec{a} = (2,-1,3)$ og $\vec{b} = (1,1,-2)$

Vi vet at $\vec{a}\times\vec{b}$ står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$: Har

$$\begin{array}{cccccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}$$

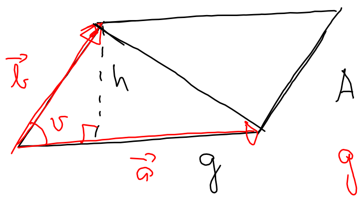
$$\vec{a}\times\vec{b} = (\underbrace{(-1)(-2)}_{2} - \underbrace{3\cdot 1}_{3})\vec{i} + (\overbrace{3\cdot 1 - 2\cdot(-2)}^{3+4})\vec{j} + (\overbrace{2\cdot 1 - (-1)\cdot 1}^{2+1})\vec{k}$$

$$= -1\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k} = \underline{(-1, 7, 3)}$$



parallellogram utspent av $\vec a$ og $\vec b$.

Areal til parallellogram



$A = g \cdot h$

$g = |\vec a|$

$h = |\vec b| \sin v$

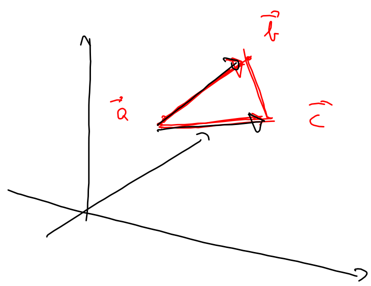
$A = |\vec a||\vec b| \sin v$

$= |\vec a \times \vec b|$

Setning: Arealet til parallellogrammet utspent av $\vec a$ og $\vec b$ er $|\vec a \times \vec b|$. Arealet til trekanten utspent av $\vec a$ og $\vec b$ er $\frac{1}{2}|\vec a \times \vec b|$

Eksempel: Hva er arealet til trekanten med hjørner i

$\vec a = (1,-1,2)$, $\vec b = (2,2,-3)$, $\vec c = (1,3,0)$



Det er nok å regne ut arealet av trekanten utspent av vektorene $\vec b - \vec a$ og $\vec c - \vec a$:

$\vec b - \vec a = (2,2,-3) - (1,-1,2) = (1,3,-5)$

$\vec c - \vec a = (1,3,0) - (1,-1,2) = (0,4,-2)$

$\vec i$	$\vec j$	$\vec k$	$\vec i$	$\vec j$	$\vec k$
1	3	-5	1	3	-5
0	4	-2	0	4	-2

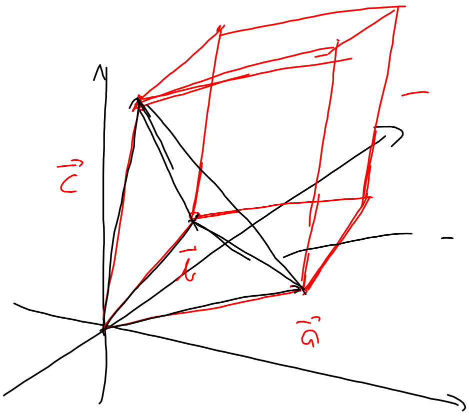
$0 + 2$

$$(\vec b - \vec a) \times (\vec c - \vec a) = (\underbrace{3(-2) - (-5)\cdot 4}_{-6+20})\vec i + ((-5)\cdot 0 - 1(-2))\vec j + (1\cdot 4 - 3\cdot 0)\vec k$$

$$= 14\vec i + 2\vec j + 4\vec k$$

$$A = \frac{1}{2}|(\vec b - \vec a) \times (\vec c - \vec a)| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + 2^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{196 + 4 + 16}$$

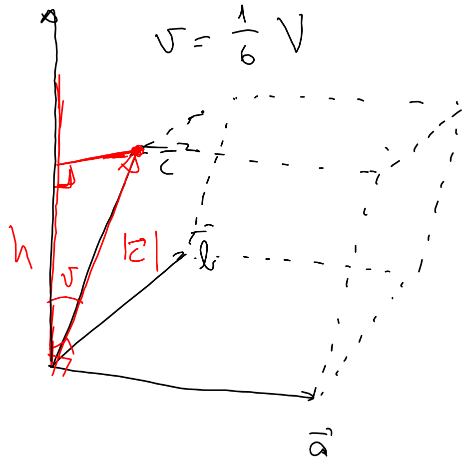
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{216}}}$$



– parallellepipedet utspent av $\vec a, \vec b, \vec c$: Volum V

– pyramiden utspent av $\vec a, \vec b, \vec c$: volum v

$$v = \frac{1}{6} V$$



$$h = |\vec c| \cos v$$

$$V = G\,h = |\vec a \times \vec b| \cdot h$$

$$= |\vec a \times \vec b|\,|\vec c\,|\,|\cos v|$$

$$= |(\vec a \times \vec b) \cdot \vec c\,|$$

Setning: Volumet til parallellepipedet utspent av $\vec a, \vec b$ og $\vec c$ er

$$V = |(\vec a \times \vec b) \cdot c\,|$$

Volumet til pyramiden utspent av $\vec a, \vec b$ og $\vec c$ er

$$v = \frac{1}{6} |(\vec a \times \vec b) \cdot \vec c\,|$$

Matriser

En matrise er et rektangulært oppsett av tall:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & \pi & e \\ 1 & 4 & 16 & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

3×4-matrise
3-rader / linjer
4-søyler / kolonner.

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{17} & 4 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4×2-matrise : 4 rader, 2 søyler.

m×n-matrise:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} er elementet i i-te linje og j-te søyle.

Addisjon av matriser av samme dimensjon:

Komponentvis: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & 21 \end{pmatrix}$$

Transponering: Bytter om søyler og rader: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

3×2-matrise

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2×3-matrise

Hovedhensikten med matriser er å transformere vektorer.

	I	II	III
Bra	0.2	0.4	0.5
Dårlig	0.4	0.2	0.3
Elendig	0.4	0.4	0.2

I har 600 studenter
II har 10 student
III har 200 studenter.

$$\begin{pmatrix} 600 \\ 10 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$120 + 4 + 100$

Bra: $0.2 \cdot 600 + 0.4 \cdot 10 + 0.5 \cdot 200 = 224$

$240 + 2 + 60$

Dårlig: $0.4 \cdot 600 + 0.2 \cdot 10 + 0.3 \cdot 200 = 302$

Elendig: $\underbrace{0.4 \cdot 600}_{240} + \underbrace{0.4 \cdot 10}_{+4} + \underbrace{0.2 \cdot 200}_{+40} = 284$

$$\begin{pmatrix} 224 \\ 302 \\ 284 \end{pmatrix}$$

Definisjon: Anta at $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ er en $m \times n$-matrise og $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ er en søylevektor. Da definerer vi produktet $A\vec{x}$ ved

$$A\vec{x} = \left.\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}\right\} m\text{-tuppel}$$