1309_Forelesning_MAT1100

onsdag 13. september 2017 12.23

1309 - Forelesning

Audio recording started: 12.25 onsdag 13. september 2017

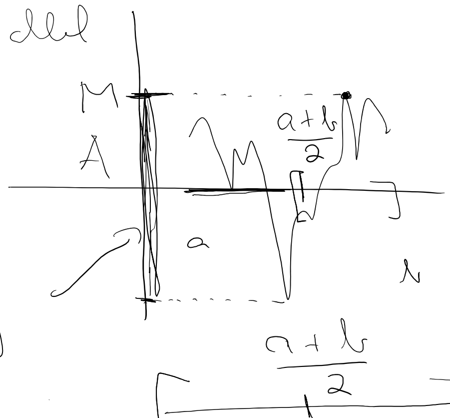
Ekstremalverdisetningen

Ekstremalverdisetningen: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall. Da har f maks- og min-punkter og er dermed begrenset.

Bevis for makspunkter:

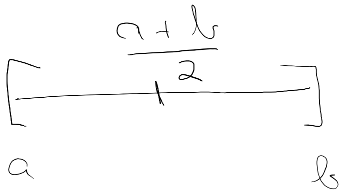
$$M = \sup\{\underbrace{f(x) : x \in [a,b]}_{A}\}$$

der $M = \infty$ hvis mengden A er ubegrenset. Del intervallet $[a,b]$ i to like store deler



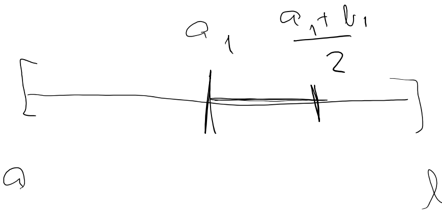
$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

Over minst ett av disse



delintervallene har f

supremum lik M. Kall dette delintervallet $[a_1, b_1]$.



Gjenta prosedyren med intervallet $[a_1, b_1]$: Del det i to og plukker ut et delintervall der supremum fortsatt er M.

På denne måten får vi en kjede av intervaller

$$[a, b], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$$

der f har supremum M. Siden intervallene ligger inni hverandre, utgjør endepunktene en voksende følge begrenset av b

og følgelig konvergerer $\{a_n\}$ mot et punkt $c \in [a, b]$.

Siden M er supremum til f på hvert av intervallene $[a_n, b_n]$, kan vi finne en følge $\{c_n\}$ der $c_n \in [a_n, b_n]$ slik at $f(c_n) \to M$.

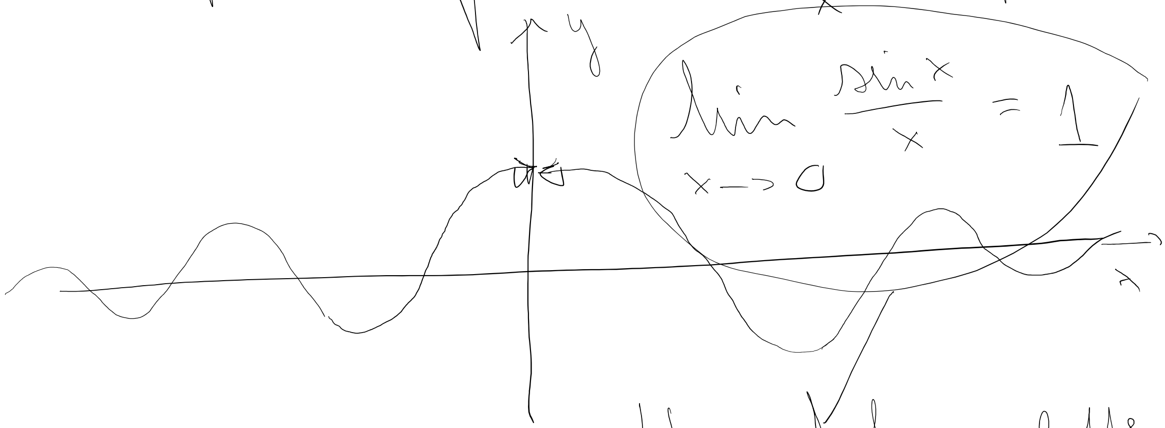
Siden $a_n \to c$ og $c_n \in [a_n, b_n]$, må $c_n \to c$. Dermed vet vi at

$$f(c) = \lim_{n \to \infty} f(c_n) = M$$

Siden M er supremum av alle funksjonsverdier, betyr dette at c er et maksimalpunkt for f. $\square$

Grenser

Eksempel: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ for $x \neq 0$



$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Hva betyr dette?

Hva skal det bety at $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Intuitivt: Vi kan få $f(x)$ $\overbrace{\text{så nær}}^{\varepsilon}$ L vi måtte ønske ved å velge x $\underbrace{\text{tilstrekkelig nær}}_{\delta}$ a, men ikke lik a.

Definisjon: Vi sier at $\lim_{x \to a} f(x) = L$

dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $0 < |x-a| < \delta$, så er $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Eksempel: Bruk definisjonen til å vise at $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$.

Vi må vise at for enhver $\varepsilon > 0$, finnes det en $\delta > 0$ slik at når $0 < |\underbrace{x-4}_{h}| < \delta$, så er $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$

Ser på uttrykket jeg skal ha mindre enn ε:

$$|\sqrt{x} - 2| = \left|\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{\sqrt{x}+2}\right|$$

$$= \left|\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\right| \leq \frac{|x-4|}{2} < \varepsilon$$

Velger $\delta = 2\varepsilon$. Da ser vi at hvis $|x-4| < \delta = 2\varepsilon$, så er

$$|\sqrt{x} - 2| \leq \frac{|x-4|}{2} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Regneregler for grenseverdier: Anta at $\lim_{x \to a} f(x) = A$ og $\lim_{x \to a} g(x) = B$. Da

(i) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = A + B$

(ii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = A - B$

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = AB$

(iv) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ forutsatt at $B \neq 0$.

<u>Eksempel:</u> $\lim\limits_{x \to 3} \frac{7x^2 - 2x}{2x + 4} = \frac{7 \cdot 9 - 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 4} = \frac{63 - 6}{6 + 4} = \underline{\underline{\frac{57}{10}}}$

<u>Eksempel</u> $\lim\limits_{x \to 0} \frac{7x^2 + 3x}{3x^2 + 2x} =$ (faktoriser ut laveste potens)

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{(7x+3)\cancel{x}}{(3x+2)\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{7x+3}{3x+2} = \frac{7 \cdot 0 + 3}{3 \cdot 0 + 2}$

$= \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

<u>Eksempel:</u> $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$ $\left(\text{"} \frac{0}{0} \text{"} \right)$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{x + 2 - 4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{x+2}_{4}}+2} = \frac{1}{2+2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

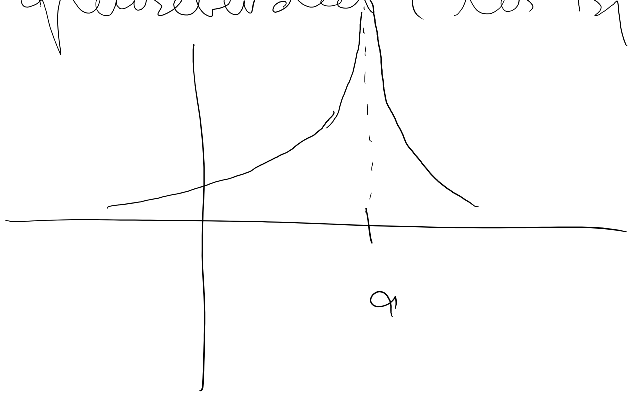
<u>Setningen:</u> Anta at f er definert i en omegn om a.

Da er f kontinuerlig i a hvis og bare hvis

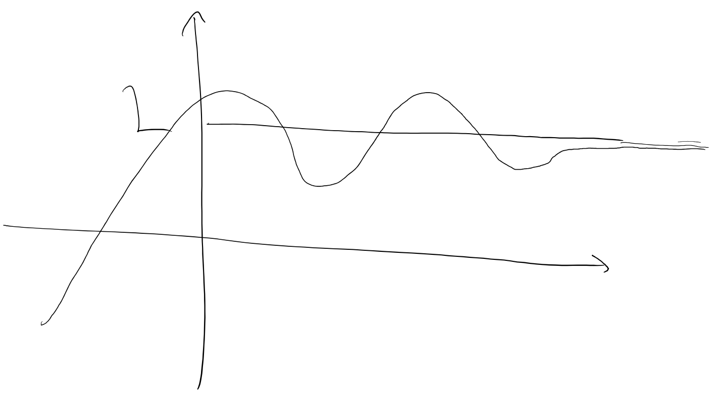
$$\underline{\lim_{x \to a} f(x) = f(a).}$$

Flere typer grenseverdier (les sjøl):

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

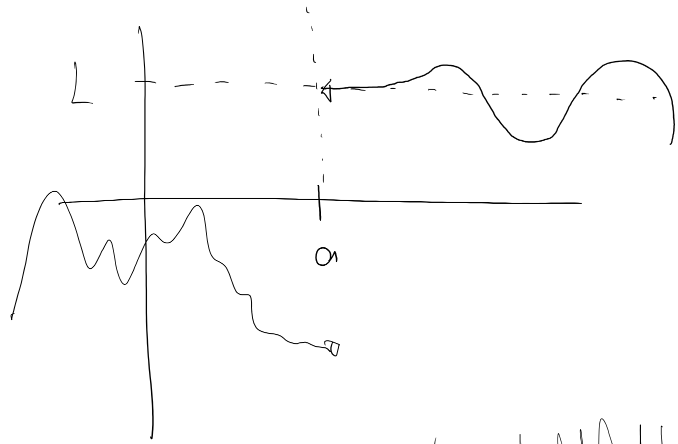


$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

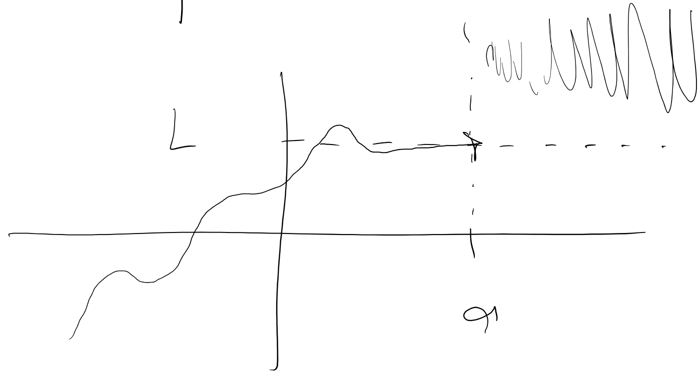


Ensidige grenser:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$



Setning: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ hvis og bare hvis

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

og

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Eksempel: La f være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{for } x > c \\ e^x + 2 & \text{for } x \le c \end{cases}$$

Vis at f er kontinuerlig i $x = 0$.

Ser at $f(0) = e^0 + 2 = \underline{\underline{3}}$

Nok å vise at $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$

dvs at

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3 \quad V$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 3 \quad V$$

Får

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x + 3) = \underline{\underline{3}}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (e^{x} + 2) = e^0 + 2 = \underline{\underline{3}}$$