Ubestemte integraler

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ der $F(x)$ er en eller annen antiderivert til $f(x)$.

Regneregler:

a) $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

b) $\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

c) $\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ k er konstant

Substitusjon (enkel form): $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$

der F er en antiderivert til f. $(F' = f)$

Bevis: Vi må vise at $F(g(x))$ er en antiderivert til $f(g(x))g'(x)$:

Deriverer: $(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))g'(x)$. HURRA!

I praksis: $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$

$u = g(x)$

$\frac{du}{dx} = u' = g'(x)$

(Huff) $du = g'(x)\,dx$

$= \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$

Eksempel: $\int (7e^x + x\cos(x^2))\,dx = \int 7e^x\,dx + \int x\cos(x^2)\,dx$

$u = x^2$

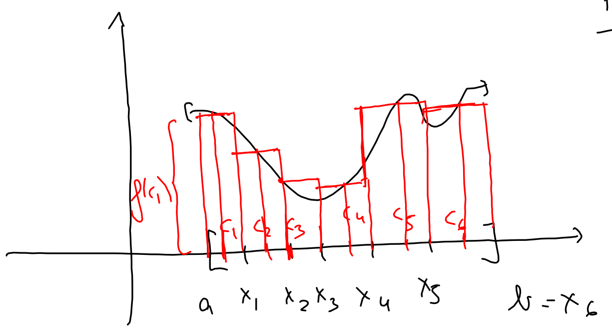
$du = 2x\,dx$

$x\,dx = \frac{1}{2}du$

$= 7\int e^x\,dx + \int \frac{1}{2}\cos u\,du$

$= 7e^x + \frac{1}{2}\sin u + C = 7e^x + \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$

Riemann-summer



Partisjon:

$$\Pi = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$$

Utplukk:

$$U = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$$

der $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Riemannsummen til Π og U:

$R(\Pi, U)$ = samlet areal til boksene = $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$

Idé: Riemannsumme nærmer seg integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ når partisjonen blir finere og finere.

Maskevidden til Π = lengden til det lengste delintervallet

$$= \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \ldots, n\} = |\Pi|$$

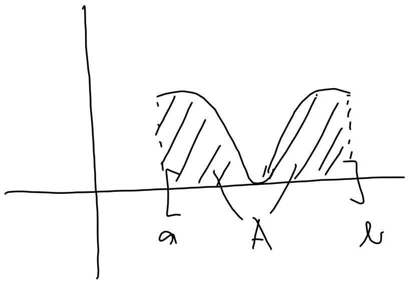
Teorem: Anta at vi har en følge $\{\Pi_n, U_n\}$ av partisjoner og utplukk slik $|\Pi_n| \to 0$. Da

$$\lim_{n \to \infty} R(\Pi_n, U_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

(altså Riemannsummene konvergerer mot integralet når partisjonene blir finere og finere).

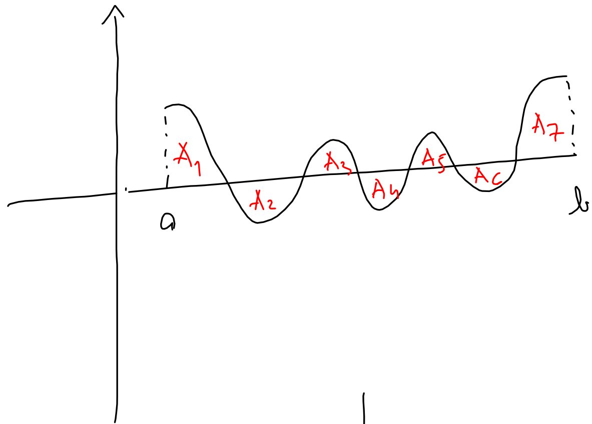
Integralen i praksis:

Arealer: $f \geq 0$



$\int_a^b f(x)\,dx$ = arealet under grafen fra a til b

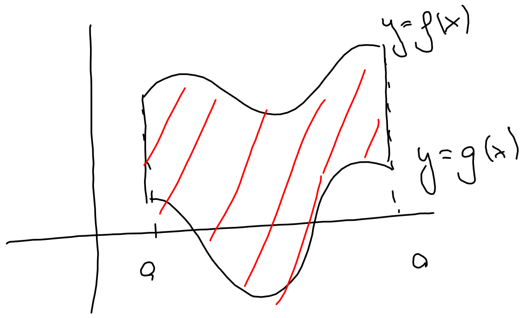
Hva hvis f ikke er positiv over alt:



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + A_7$$

der A'ene er arealene til områdene.

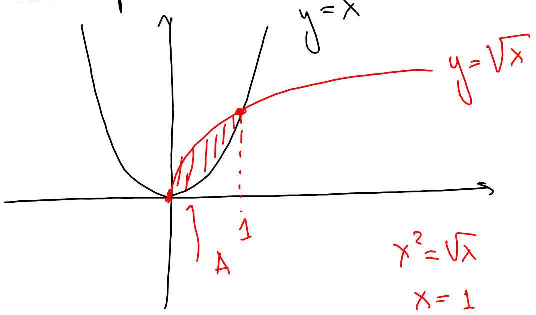
Arealer mellom funksjonsgrafer:



Dersom $f(x) \geq g(x)$, så er arealet mellom grafene gitt ved:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Eksempel: Regn ut arealet avgrenset av funksjonsgrafene $y = x^2$ og $y = \sqrt{x}$



$x^2 = \sqrt{x}$

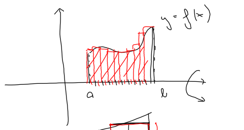
$x = 1$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Omdreiningslegeme om x-aksen:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx$$



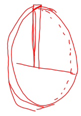
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i$$

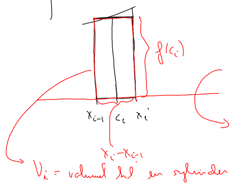
$$= \sum_{i=1}^{n} \pi f(c_i)^2 (x_i - x_{i-1})$$

Riemannsum til funksjonen $\pi f(x)^2$

$$\to \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$





V_i = volumet til en sylinder med radius $f(c_i)$ og høyden $x_i - x_{i-1}$

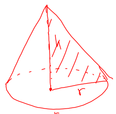
$$= \pi f(c_i)^2 (x_i - x_{i-1})$$

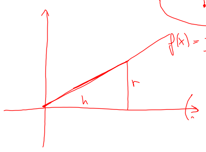
$$\boxed{\sum f(c_i)(x_i - x_{i-1})}$$

Defn: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$

Eksempel: Volumet til en kjegle er

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$





$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

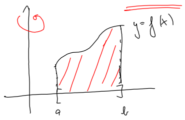
$$= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x\right)^2 dx$$

$$= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \pi \frac{r^2}{\cancel{h^2}} \frac{h^{\cancel{3}}}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi r^2 h}{3}}}$$

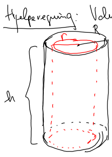
Omdreiningslegemer om y-aksen:

Hva er volumet?



$a \geq 0$

Hjelperegning: Volumet til et rør:



$$V = V_{\text{ytre sylinder}} - V_{\text{indre sylinder}}.$$

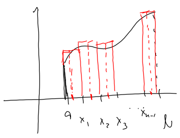
$$= \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h (R^2 - r^2)$$

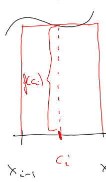
$$= \pi h (R+r)(R-r) = 2\pi h \frac{R+r}{2} (R-r)$$

$$= \underline{2\pi h \, r_{\text{mid}} (R-r)}$$

↳ midlere radius

Tilbake til omdreiningslegemet:





Får et rør med høyde, og midlere radius c_i, samt tykkelse $x_i - x_{i-1}$

$$V_i = 2\pi f(c_i) c_i (x_i - x_{i-1})$$

Totalt volum: $V \approx \sum V_i = \sum 2\pi c_i f(c_i) (x_i - x_{i-1})$

Riemannsum til funksjonen $2\pi x f(x)$

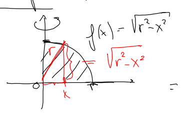
$$\to \int_a^b 2\pi x f(x) \, dx$$

$$\boxed{\sum g(c_i)(x_i - x_{i-1})}$$

Vi får

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx$$

Eksempel: Regn ut volumet til en halvkule.



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$V = 2\pi \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} \, dx =$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= r^2 - x^2 \\ du &= -2x\,dx \\ x\,dx &= -\tfrac{1}{2} du \end{aligned}}$$

Mellomregning: Løser det ubestemte integralet først.

$$\int x \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \int -\frac{1}{2} \sqrt{u} \, du = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u} \, du = -\frac{1}{2} \int u^{1/2} du$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}} \left[\frac{\cancel{2}}{3} u^{3/2}\right] = -\frac{1}{3} u^{3/2} = \underline{-\frac{1}{3} (r^2 - x^2)^{3/2}}$$

$$V = 2\pi \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 2\pi \left[-\frac{1}{3} (r^2 - x^2)^{3/2}\right]_0^r$$

$$= 2\pi \left[0 + \frac{1}{3} \left((r^2)^{3/2}\right)\right] = 2\pi \cdot \frac{1}{3} r^3 = \underline{\underline{\frac{2\pi r^3}{3}}}$$