Funksjoner av flere variable

"Vanlige" funksjoner: $x \to \boxed{f} \to \underbrace{y = f(x)}_{\text{et tall}}$

et tall

Funksjoner av flere variable:

$\vec{x} \to \boxed{\vec{F}} \to \underbrace{\vec{y} = \vec{F}(\vec{x})}$

en vektor i $\mathbb{R}^n$ en vektor i $\mathbb{R}^m$

Definisjon: En funksjon $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en regel eller tilordning som til hver $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gir oss en $\vec{y} = \vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$

Alternative skrivemåter: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

$$\vec{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ F_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

komponenter til $\vec{F}$.

Eksempler: a) $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 y + z \\ e^{x^2 + 2yz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(1,-1,2) = \begin{pmatrix} 1^2(-1) + 2 \\ e^{1^2 + 2(-1)\cdot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-3} \end{pmatrix}$$

b) $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$

$$F(x,y,z,u) = \arctan\left(e^{\sin(xy^2 + \cos(xyzu^2))}\right)$$

Hvorfor har vi bruk for dette?

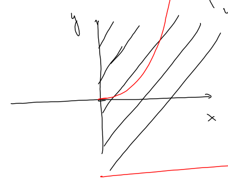
Temperatur: $T(x,y,z,t)$ = temperaturen i punktet (x,y,z) ved tiden t.

Vind: $\vec{V}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} V_1(x,y,z,t) \\ V_2(x,y,z,t) \\ V_3(x,y,z,t) \end{pmatrix}$ $\vec{V}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

Definisjonsmengde

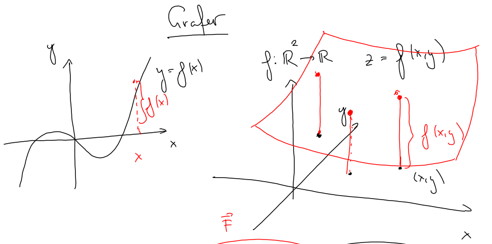
Funksjonene er vanligvis definert i alle punkter der funksjonsuttrykket gir mening.

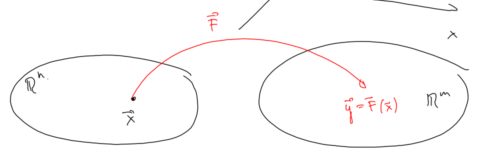
Eksempel: $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \ln(x) \\ \frac{1}{y - x^2} \end{pmatrix}$ $x > 0$, $y \neq x^2$



$D_{\vec{F}} = \{(x,y) : x > 0 \text{ og } y \neq x^2\}$

Grafer



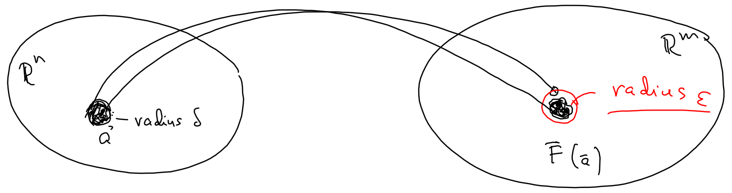


Kontinuitet:

Hvis $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, hva betyr det at $\vec{F}$ er kontinuerlig i $\vec{a}$?

Ideen: "Vi kan få $\vec{F}(\vec{x})$ så nær $\vec{F}(\vec{a})$ vi måtte ønske ved å velge $\vec{x}$ tilstrekkelig nær $\vec{a}$."

Definisjon: $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ er kontinuerlig i punktet $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$ dersom det for hver $\varepsilon>0$ finnes en $\delta>0$ slik at når $|\vec{x}-\vec{a}|<\delta$, så er $|\vec{F}(\vec{x})-\vec{F}(\vec{a})|<\varepsilon$.



Setning: En funksjon $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ er kontinuerlig hvis og bare hvis alle komponentene $F_1, F_2, \dots, F_m$ er det.

$$\vec{F}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{pmatrix}F_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \vdots \\ F_m(x_1,x_2,\dots,x_n)\end{pmatrix}$$

Setning: Dersom $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ er kontinuerlige, så er også

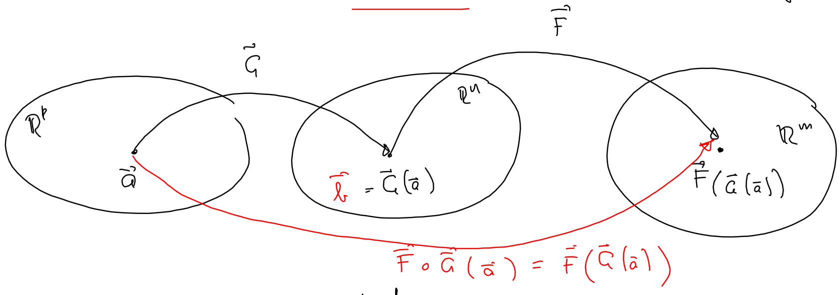
(i) $f+g$ kont.

(ii) $f-g$ kont

(iii) $f\cdot g$ kont

(iv) $\dfrac{f}{g}$ er kontinuerlig hvis $g\neq 0$.

Setning: Dersom $\vec{G}:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$, $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, der $\vec{G}$ er kontinuerlig i $\vec{a}$ og $\vec{F}$ er kontinuerlig i $\vec{b}=\vec{G}(\vec{a})$, så er $\vec{F}\circ\vec{G}$ kontinuerlig i $\vec{a}$.



Eksempel: Vis at $f(x,y)=\overbrace{x^2}^{\text{kont}}y\,\sin\overbrace{(x+y)}^{\text{kont}}$ er kontinuerlig.

kont kont kont kont

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{kont}}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{kont.}}$

$(x,y)\to x$

$(x,y)\to y$

Grenseverdier

Anta at $\vec{F}$ er definert i alle punkter i nærheten av $\vec{a}$, men ikke nødvendig i $\vec{a}$ selv. Da er

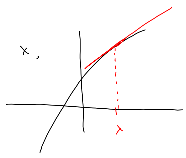
$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{b}$$

hvis det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når

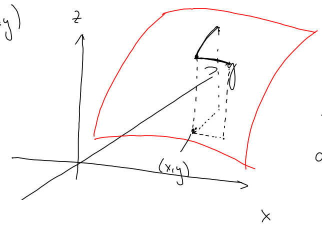
$0 < |\vec{x}-\vec{a}| < \delta$, så er $|\vec{F}(\vec{x})-\vec{F}(\vec{a})| < \varepsilon$.

Derivasjon:

$y = f(x)$, $f'(x)$ angir hvor fort funksjonen vokser i x.



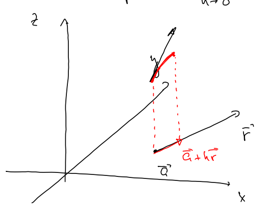
$z = f(x,y)$



Hvor fort funksjonen vokser, er avhengig av retningen vi går.

Retningsderiverte: Den retningsderiverte til f i punktet $\vec{a}$ og retning $\vec{r}$ er definert ved

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$



Det viser seg at det er spesielt enkelt å regne ut de retningsderiverte parallell med aksene, dvs når

$$\vec{r} = (1,0,0,\dots,0) = \vec{e}_1,$$
$$(0,1,0,\dots,0) = \vec{e}_2,$$
$$\vdots$$
$$(0,0,\dots,1,\dots,0) = \vec{e}_i$$

i-te plass

$$\vdots$$
$$(0,0,\dots,1) = \vec{e}_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = f'(\vec{x},\vec{e}_i) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{e}_i)-f(\vec{x})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\dots,x_i+h,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}{h}$$

partiellderiverte av f m.h.p. x_i

= deriverer m.h.p. x_i som om alle de andre variablene er konstante

---

Eksempel: $f(x,y) = x^2y + x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cdot 1 + 0 = x^2$$

Eksempel: $f(x,y,z) = xy\sin(xz)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1\cdot y\sin(xz) + xy\cos(xz)\cdot z = y\sin(xz) + xyz\cos(xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\sin(xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy\cos(xz)\cdot x = x^2y\cos(xz)$$

En funksjon $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ har vi n partiellderiverte som vi kan sette sammen til en vektor:

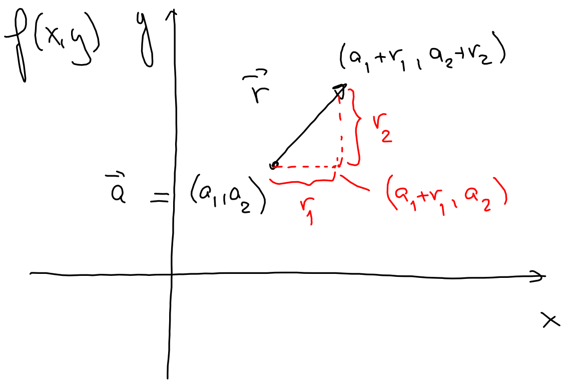
Gradienten til f: $\nabla f(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}_{\vec{x}}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\right)$

Eksempel: Finn gradienten til $f(x,y) = x e^{y^2}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot e^{y^2} \cdot 2y = 2xy e^{y^2}$$

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{y^2}, 2xy e^{y^2}\right) = e^{y^2}(1, 2xy)$$

Geometrisk betydning av gradienten



$$f(a_1+v_1, a_2+r_2) - f(a_1, a_2)$$

$$= \underbrace{f(a_1+v_1, a_2+v_2) - f(a_1+v_1, a_2)}_{\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a})\,\vec{r}_2} + \underbrace{f(a_1+v_1, a_2) - f(a_1, a_2)}_{\approx \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a})\,v_1}$$

$$\approx \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a})\,v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a})\,v_2$$

$$= \nabla f(\bar{a}) \cdot \vec{r}$$

Oppsummering: For små $\vec{r}$ er

$$f(\vec{a}+\vec{r}) - f(\vec{a}) \approx \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} \quad (\text{bedre jo mindre } \vec{r} \text{ er}).$$