31. august

3.5. Algebraens fundamentalteorem

Definisjon: Et uttrykk på formen

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

der $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ kalles et (komplekst) polynom av grad n.

Tallene $a_n, \dots, a_0$ kalles koeffisientene til polynomet.

Hvis $a_n, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ har vi et reelt polynom

$$P(z) = 0$$

kalles en algebraisk likning.

En løsning av en slik likning kalles en rot (et nullpunkt) til polynomet.

eks. $P(z) = z^5 - iz + 1$

er et komplekst femtegradspolynom

$a_5 = 1$, $a_4 = a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = -i$, $a_0 = 1$

Algebraens fundamentalteorem

La $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ være et komplekst polynom av grad n.

Da fins $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ slik at

$$P(z) = a_n (z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_n)$$

for alle komplekse tall z. Opp til rekkefølgen på faktorene er faktoriseringen entydig bestemt.

Merk! Bevis ikke pensum (men står i kap. 5*)

$r_1, \dots, r_n$ fins, men Alg FT sier ikke noe om hvordan vi finner dem

r_i-ene kan være like

La $r_1, r_2, \dots, r_j$, $j < n$ være forskjellige.
Da kan vi skrive

$$P(z) = a_n (z-r_1)^{n_1} (z-r_2)^{n_2} \cdots (z-r_j)^{n_j}$$

n_i kalles multiplisiteten til roten r_i

$n_1 + n_2 + \dots + n_j = n$

eks. $P(z) = (z^2+3)(z^2-6z+9)$

$$= (z-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3})(z-3)^2$$

$i\sqrt{3}$ er en rot til $P(z)$ med multiplisitet 1
$-i\sqrt{3}$ — " — 1
3 — " — 2

eks. $P(z) = z^3 + (2-i)z^2 + (1-2i)z - i$

Skriv $P(z)$ som et produkt av førstegradspolynomer.

$P(z)$ er et komplekst 3.gradspolynom.

Må finne røttene til $P(z)$.

$$P(i) = i^3 + (2-i)i^2 + (1-2i)i - i$$
$$= \cancel{-i} \cancel{-2} \cancel{+i} \cancel{+i} \cancel{+2} \cancel{-i}$$
$$= 0$$

$i^2 = -1$

i er en rot

$$\left(z^3 + (2-i)z^2 + (1-2i)z - i\right) : (z-i) = z^2 + 2z + 1$$
$$\underline{-(z^3 - iz^2)}$$
$$2z^2 + (1-2i)z - i$$
$$\underline{-(2z^2 - 2iz)}$$
$$z - i$$
$$\underline{-(z-i)}$$
$$0$$

$$P(z) = (z-i)(z^2+2z+1)$$
$$= \underline{\underline{(z-i)(z+1)^2}}$$

Reelle polynomer

Lemma 3.5.3 Hvis $P(z)$ er et reelt polynom og r er en rot i $P(z)$ så er $\bar{r}$ også en rot.

Bevis: La $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$
være et reelt polynom (dvs. a_i-ene er reelle tall).
Anta at r er en rot i $P(z)$ (dvs. $P(r)=0$).

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

Vi vil vise at $P(\bar{r}) = 0$.

$$\overline{a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0} = \bar{0} = 0$$

$$\bar{a}_n \bar{r}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{r}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{r} + \bar{a}_0 = 0$$ (regneregler for konjugasjon)

siden $a_i \in \mathbb{R}$ så er $\bar{a}_i = a_i$ for alle a_i-ene (dvs. $i = 0, 1, 2, \dots, n$)

$$a_n \bar{r}^n + a_{n-1} \bar{r}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{r} + a_0 = 0$$

$$P(\bar{r}) = 0$$ (bruker at $P(z)$ er et reelt polynom)

så $\bar{r}$ er en rot i $P(z)$. ∎

(Direkte bevis.)

Lemma 3.5.4 To konjugerte røtter til et reelt polynom har samme multiplisitet.

Bevis: Anta $P(z)$ er et reelt polynom og at r og $\bar{r}$ er konjugerte røtter til $P(z)$.

Anta at multiplisiteten til r er n.
Anta — " — $\bar{r}$ er k.

Anta at $n \neq k$, $n > k$.

$$P(z) = a_n (z-r)^n (z-\bar{r})^k S(z)$$

der $S(z)$ har andre røtter enn r og $\bar{r}$

Deler med $(z-r)^k (z-\bar{r})^k$:

$$\frac{P(z)}{(z-r)^k (z-\bar{r})^k} = \underbrace{a_n (z-r)^{n-k} S(z)}$$

er et reelt polynom
der r er en rot
men $\bar{r}$ er ikke en rot

noe som motsier det forrige lemmaet

Tilsvarende får vi motsigelse hvis $n < k$.
Dermed må antagelsen $n \neq k$ være feil, dvs. $n = k$ så r og $\bar{r}$ har samme multiplisitet. ∎

(Motsigelsesbevis.)

VIKTIG!

$(z-r)(z-\bar{r})$

$= z^2 - rz - \bar{r}z + r\bar{r}$

$$\boxed{= z^2 - \underbrace{(r+\bar{r})}_{\in \mathbb{R}} z + \underbrace{r\bar{r}}_{\in \mathbb{R}}}$$

$r = a + ib$

$r + \bar{r} = (a+ib) + (a-ib) = 2a \in \mathbb{R}$

$r\bar{r} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

$(z-r)(z-\bar{r})$ er et reelt polynom

Korollar 3.5.5 Ethvert reelt polynom av odde grad har en reell rot.

Bevis: (se boka)
Siden røttene opptrer i konjugerte par må vi ha minst en rot som er sin egen konjugert for å få et oddetall som grad på polynomet.

Konsekvens:

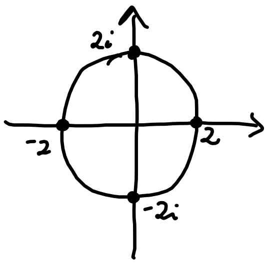
Ethvert reelt n-te grads polynom kan skrives som et produkt av reelle førstegrads- og andregradspolynomer (der andregradspolynomene ikke har reelle røtter – vi får disse ved å gange ut $(z-r)(z-\bar{r})$).

eks. $P(z) = z^4 - 16$

Finn komplelis og reell faktorisering av $P(z)$.

$$z^4 - 16 = 0$$
$$z^4 = 16$$

Løsninger: $z = 2$, $z = -2$, $z = 2i$, $z = -2i$



Komplelis faktorisering:

$$\underline{\underline{(z-2)(z+2)\underbrace{(z-2i)(z+2i)}}}$$

Reelle faktorisering:

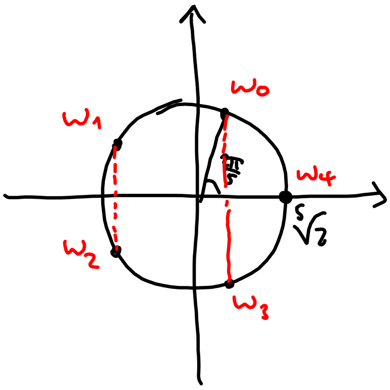
$$\underline{\underline{(z-2)(z+2)(z^2+4)}}$$

eks: $P(z) = z^5 - 2$ (reelt, odde grad)

Finn kompleks og reell faktorisering.

Finne røttene:

$$z^5 - 2 = 0$$
$$z^5 = 2$$



$$2e^{i2\pi}$$

$$w_0 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi}{5}}$$

$$w_1 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{5}} = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{4\pi}{5}}$$

$$w_2 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{6\pi}{5}}$$

$$w_3 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

$$w_4 = \sqrt[5]{2}e^{i2\pi} = \sqrt[5]{2}$$

$$w_0 = \overline{w_3}$$
$$w_1 = \overline{w_2}$$

Kompleks faktorisering: $(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{4\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{6\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{8\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2})$

reelt

reelt

Reelle faktorisering:

$$(z - \sqrt[5]{2})\left(z^2 - 2\sqrt[5]{2}\cos\frac{2\pi}{5}z + (\sqrt[5]{2})^2\right)\left(z^2 - 2\sqrt[5]{2}\cos\frac{4\pi}{5}z + (\sqrt[5]{2})^2\right)$$

$$e^{i\frac{2\pi}{5}} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$