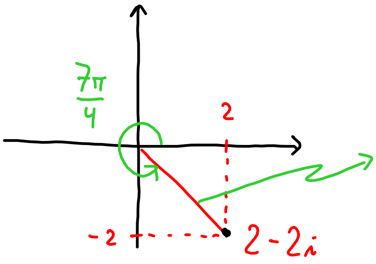
Løsningsforslag midtveis eksamen Mat1100 høst 2016

Oppgave 1

$$(2i)^2 + 4 = 2^2 \cdot i^2 + 4 = 4 \cdot (-1) + 4 = 0$$

$\boxed{C}$

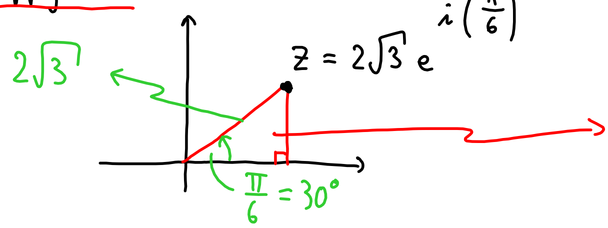
Oppgave 2



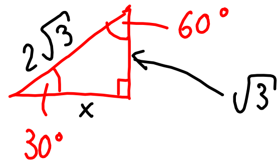
$$r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$\boxed{B}$

Oppgave 3



30/60/90 - trekant

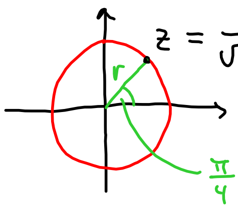


$$x^2 + (\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2$$
$$x^2 + 3 = 4 \cdot 3$$
$$x^2 = 9$$
$$x = 3$$

Så $z = \underline{\underline{3 + \sqrt{3}\, i}}$

$\boxed{E}$

Oppgave 4



$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$r = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

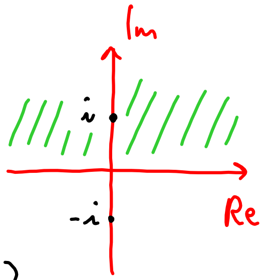
Så $z = 1 \cdot e^{i(\pi/4)} = e^{i(\pi/4)}$

Altså $z^{16} = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{16} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} \cdot 16\right)} = e^{i(4\pi)} = 1$

$\boxed{E}$

Oppgave 5

Kravet for at et punkt z skal ligge i mengden, er at avstanden til punktet $(-i)$ er større enn avstanden til punktet i.



Mengden kan nemlig skrives $\{z \mid |z-(-i)| > |z-i|\}$

$\boxed{D}$

Oppgave 6

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36-4\cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm i\cdot 4}{2} = \begin{cases} 3+2i \\ 3-2i \end{cases}$$

$\boxed{B}$

Oppgave 7

$f(x) = x \ln x$ gir $f'(x) = 1\cdot \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ for $x > 0$

$\boxed{A}$

Oppgave 8

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x\sin x}{e^x - 1} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2x + \sin x + x\cos x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x}_{\to 1}} = 0$$

$\boxed{D}$

Oppgave 9

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + (-3)^n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{(-2)^n}{(-3)^n}}^{\to 0} + 1}{\underbrace{\frac{e^n}{(-3)^n}}_{\to 0}}$$

(fordi $e < 3$)

$\boxed{A}$

Oppgave 10

Hvis følgen konvergerer mot tallet L, må vi ha

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n}$$

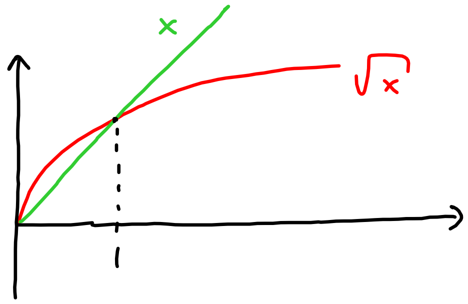
$$L = \sqrt{L}$$

$$L^2 = L, \quad \text{dvs. } L = 0 \text{ eller } L = 1.$$

Vi har $a_0 > 1$. Hvis $a_n > 1$, får vi

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} > \sqrt{1} = 1$$

Så følgen er nedad begrenset av 1.



Siden $\sqrt{x} < x$ for $x > 1$, er følgen strengt avtakende. Altså konvergerer den mot 1.

$\boxed{C}$

Oppgave 11

$$(2+2i)^2 = (2+2i)\cdot(2+2i) = 4 + 4i + 4i - 4 = 8i$$

$$(2+2i)^3 = 8i(2+2i) = 16i - 16$$

Så
$$P(2+2i) = (2+2i)^3 - (2+3i)(2+2i)^2 - (2-2i)(2+2i)$$
$$= 16i - 16 - (2+3i)\cdot 8i - (4 - \cancel{4i} + \cancel{4i} + 4)$$
$$= 16i - 16 - 16i + 24 - 8 = 0$$

$\boxed{C}$

Oppgave 12

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} \overset{[0^0]}{=} \lim_{x\to 0^+} \left(e^{\ln x}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{(\ln x)\cdot\sqrt{x}}$$

Eksponenten:

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln x)\cdot\sqrt{x} \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}}$$

$$\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-2)\cdot\frac{x^{1/2}}{1} = 0$$

Altså $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$ $\boxed{B}$

Oppgave 13

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x}$$

$$\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$$

$$\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x}$$

$$= \frac{0}{2} = 0$$ $\boxed{C}$

Oppgave 14

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cos x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot x - \left[\ln(\sin^2 x) - \sqrt{x}\right]\cdot 1}{x^2}$$

$$= \left[\frac{2x\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} - \ln(\sin^2 x) + \sqrt{x}\right] \Big/ x^2$$

$\boxed{D}$

Oppgave 15

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x e^{2/x}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{2/x \to 0} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - ax\right] = \lim_{x\to\infty}\left[x e^{2/x} - x\right]$$

$$\overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to\infty} x \cdot \left[e^{2/x} - 1\right]$$

$$\overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2/x} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2/x}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2e^{2/x \to 0} = 2$$

Så denne funksjonen har skråasymptote

$$y = ax + b = \underline{x + 2}$$

$\boxed{A}$

Oppgave 16

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

For å undersøke denne grensen, ser vi på de to ensidige grensene:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h) - \ln 1^{\,0}}{h} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+h}}{1} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h-1) - \ln 1^{\,0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

(Oppg. 16 forts.)

Siden de to ensidige grensene fins og er like, fins den tosidige grensen. Altså $f'(1) = 1$, dvs. f er deriverbar i $x = 1$. Da vet vi at den også er kontinuerlig i $x = 1$. $\boxed{C}$

Oppgave 17

$$\left.\begin{aligned} 2^4 = 16 \quad &, \quad (2i)^4 = 16 \cdot i^4 = 16 \\ (-2)^4 = 16 \quad &, \quad (-2i)^4 = 16 \cdot i^4 = 16 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{A}$$

Oppgave 18

$$f(x) = ax + x^a + \left(e^{\ln a}\right)^x = ax + x^a + e^{(\ln a)x}$$

$$\text{Så } f'(x) = x + ax^{a-1} + e^{(\ln a)x} \cdot \ln a$$

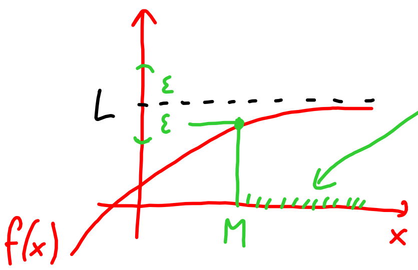
$$= \underline{\underline{x + ax^{a-1} + a^x \ln a}} \qquad \boxed{B}$$

Oppgave 19

Rolles teorem sier at hvis en funksjon f er kontinuerlig på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b), og $f(a) = f(b) = 0$, så fins $x \in (a,b)$ slik at $f'(x) = 0$. Bruker vi denne setningen med $f'(x)$ i rollen som f, får vi påstanden i $\boxed{B}$

Oppgave 20

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$



alle funksjonsverdier herfra ligger nærmere L enn avstanden ε.

$\boxed{D}$