UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Fredag 14. oktober 2016
Tid for eksamen:	13.00 – 15.00

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg:	Svarark, formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 20 oppgaver. De første 10 teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Om du svarer galt eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Før svarene dine inn på svararket. Krysser du av mer enn ett alternativ på en oppgave, får du 0 poeng.

Oppgave 1. (2 poeng) Hvilket komplekst tall z er en løsning av likningen $z^2 + 4 = 0$:

A) $z = -2$
B) $z = 2 - 2i$
C) $z = 2i$
D) $z = 4 - 4i$
E) $z = 4i$

Oppgave 2. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = 2 - 2i$ kan skrives:

A) $z = \sqrt{8}e^{i(5\pi/4)}$
B) $z = \sqrt{8}e^{i(7\pi/4)}$
C) $z = \sqrt{4}e^{i(5\pi/8)}$
D) $z = \sqrt{4}e^{i(3\pi/4)}$
E) $z = \sqrt{2}e^{i(\pi/8)}$

Oppgave 3. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = 2\sqrt{3}e^{i(\pi/6)}$ kan skrives:

A) $z = \sqrt{3} + 2i$
B) $z = 2\sqrt{3} - 2i$
C) $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}\,i$
D) $z = \sqrt{12} - i\sqrt{12}$
E) $z = 3 + \sqrt{3}\,i$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. (2 poeng) La $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$. Da er z^{16} lik:

A) $4e^{i(\pi/4)}$
B) $4e^{i(3\pi/4)}$
C) $4e^{i(7\pi/4)}$
D) $e^{i(\pi/4)}$
E) 1

Oppgave 5. (2 poeng) Mengden $\{z \mid |z+i| > |z-i|\}$ i det komplekse planet er:

A) En sirkelskive med sentrum i punktet $z = i$ og radius 1
B) En sirkelskive med radius 2 og sentrum i punktet $z = i$
C) En sirkelskive med radius 1 og sentrum midt mellom $z = i$ og $z = -i$
D) Den delen av planet som ligger over den reelle aksen
E) Den delen av planet som ligger til høyre for den imaginære aksen

Oppgave 6. (2 poeng) Løsningene til likningen $z^2 - 6z + 13 = 0$ har:

A) Imaginærdel 3
B) Realdel 3
C) Imaginærdel 1
D) Realdel 1
E) Realdel 0

Oppgave 7. (2 poeng) Funksjonen $f(x) = x \ln x$ er:

A) Strengt konveks på $(0, \infty)$
B) Strengt konkav på $(0, \infty)$
C) Strengt konkav på $(0, 1)$ og strengt konveks på $(1, \infty)$
D) Strengt konkav på $(0, 1/e)$ og strengt konveks på $(1/e, \infty)$
E) Strengt konveks på $(0, 1/e)$ og strengt konkav på $(1/e, \infty)$

Oppgave 8. (2 poeng) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x\sin x}{e^x - 1}$ er lik:

A) 2
B) e
C) 1
D) 0
E) -1

Oppgave 9. (2 poeng) La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være følgen gitt ved $a_n = \frac{(-2)^n + (-3)^n}{e^n}$ for $n \geq 0$. Hvilket av følgende utsagn er sant:

A) Følgen divergerer
B) Følgen konvergerer mot 0
C) Følgen konvergerer mot 1
D) Følgen konvergerer mot -3
E) Følgen konvergerer mot -5

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 10. (2 poeng) La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være følgen gitt ved $a_0 = 100$ og $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ for $n \geq 0$. Hvilket av følgende utsagn er sant:

A) Følgen divergerer
B) Følgen konvergerer mot 0
C) Følgen konvergerer mot 1
D) Følgen konvergerer mot $\sqrt{2}$
E) Følgen er avtakende og nedad begrenset av $\sqrt{2}$

Oppgave 11. (3 poeng) Hvilket komplekst tall er en rot til polynomet $P(z) = z^3 - (2+3i)z^2 - (2-2i)z$:

A) $z = -i$
B) $z = 2 + 3i$
C) $z = 2 + 2i$
D) $z = 1 + i$
E) $z = 1 - i$

Oppgave 12. (3 poeng) $\lim_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x}}$ er lik:

A) $\sqrt{2}$
B) 1
C) $1/\sqrt{2}$
D) $1/2$
E) 0

Oppgave 13. (3 poeng) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ er lik:

A) -2
B) -1
C) 0
D) 1
E) 2

Oppgave 14. (3 poeng) Den deriverte til $f(x) = \frac{\ln(\sin^2 x) - \sqrt{x}}{x}$ er:

A) $2[\frac{1}{4}\sqrt{x} + \frac{x\cos x}{\sin^2 x} - 2\ln(\sin^2 x)]/x^2$
B) $2[\frac{1}{4}\sqrt{x} + \frac{2x\cos x}{\sin x} - \ln(\sin^2 x)]/x^2$
C) $2[\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{x\cos x}{\sin x} - \ln(\sin^2 x)]/x^2$
D) $[\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{2x\cos x}{\sin x} - \ln(\sin^2 x)]/x^2$
E) $[\frac{1}{4}\sqrt{x} + \frac{x\cos x}{\sin x} - \ln(\sin^2 x)]/x^2$

Oppgave 15. (3 poeng) Hvilken funksjon har skråasymptoten $y = x + 2$:

A) $f(x) = xe^{2/x}$
B) $f(x) = 2xe^{1/x}$
C) $f(x) = xe^{1/x} - 1$
D) $f(x) = 2xe^{2/x}$
E) $f(x) = xe^{1/x} + 2$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 16. (3 poeng) La f være funksjonen definert for alle reelle tall x ved

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{for } x \geq 1 \\ x - 1 & \text{for } x < 1. \end{cases}$$

Hvilket utsagn er sant:

A) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$
B) f er kontinuerlig i $x = 1$, men ikke deriverbar i $x = 1$
C) f er kontinuerlig og deriverbar i $x = 1$
D) f er deriverbar i $x = 1$, men ikke kontinuerlig i $x = 1$
E) f er verken kontinuerlig eller deriverbar i $x = 1$

Oppgave 17. (3 poeng) Fjerderøttene til det komplekse tallet $z = 16$ er :

A) 2, $2i$, -2 og $-2i$
B) 2 og -2
C) $\sqrt{2}$, $i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ og $-i\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ og $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
E) $2 + 2i$, $-2 + 2i$, $-2 - 2i$ og $2 - 2i$

Oppgave 18. (3 poeng) La $a > 1$ være et gitt, reelt tall. Den deriverte av funksjonen $f(x) = ax + x^a + a^x$ definert for $x > 0$ er lik:

A) $a + ax^{a-1} + (a-1)a^x$
B) $a + ax^{a-1} + a^x \ln a$
C) $a + (x^{a-1} + a^x) \ln a$
D) $a + ax^{a-1} + xa^{x-1}$
E) $a + ax^{a-1} + (x-1)a^x$

Oppgave 19. (3 poeng) La f være en funksjon som er slik at $f''(x)$ fins for alle reelle tall x, og la a og b være reelle tall slik at $a < b$. Hvilket utsagn er sant:

A) f har minst ett vendepunkt i intervallet $[a, b]$
B) Hvis $f'(a) = f'(b) = 0$, så har $f''(x)$ minst ett nullpunkt i (a, b)
C) Hvis $f'(b) > f'(a)$, så har f minst ett nullpunkt i intervallet $[a, b]$
D) Hvis $f(a) = f(b) = 0$, så finnes minst ett punkt $c \in (a, b)$ slik at $f''(c) = 0$
E) Hvis $f'(b) > f'(a)$, så har f minst ett vendepunkt i intervallet (a, b)

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 20. (3 poeng) La L være et reelt tall. Hvilket av følgende utsagn kan brukes som definisjon av $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$:

A) Det fins $\epsilon > 0$ og $\delta > 0$ slik at det fins et tall x som oppfyller
$|x| < \delta$ og $|f(x) - L| < \epsilon$

B) Det fins $\epsilon > 0$ slik at for alle $\delta > 0$ fins det et tall x som oppfyller
$|x| > \delta$ og $|f(x) - L| < \epsilon$

C) For alle $\epsilon > 0$ og $M > 0$ fins det et tall x med
$|x| > M$ og $|f(x) - L| < \epsilon$

D) For alle $\epsilon > 0$ fins $M > 0$ slik at
$x > M$ medfører $|f(x) - L| < \epsilon$

E) For alle $M > 0$ fins $N > 0$ slik at
$x > N$ medfører $|f(x)| > M$

SLUTT