# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Deleksamen i: | MAT1100 — Kalkulus |
| Eksamensdag: | Fredag 12. oktober, 2012 |
| Tid for eksamen: | 15.00 – 17.00 |
| Oppgavesettet er på 5 sider. | |
| Vedlegg: | Svarark, formelsamling |
| Tillatte hjelpemidler: | Ingen. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen består av 20 spørsmål. De 10 første teller 2 poeng hver, de 10 siste teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng. Svarene fører du inn på eget svarark.

**Oppgave 1**. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = 2 - 2\sqrt{3}\, i$ kan skrives som:

A) $z = 2e^{i(\pi/4)}$
B) $z = 4e^{i(3\pi/4)}$
C) $z = 4e^{i(5\pi/3)}$
D) $z = 4e^{i(4\pi/3)}$
E) $z = 2e^{i(4\pi/3)}$

**Oppgave 2**. (2 poeng) Det komplekse tallet $z$ som har polarkoordinatene $r = \sqrt{2}$ og $\theta = \dfrac{7\pi}{2}$ kan skrives som:

A) $z = -i\sqrt{2}$
B) $z = i\sqrt{2}$
C) $z = 1 + i$
D) $z = 1 - i$
E) $z = -1 + i$

*(Fortsettes på side 2.)*

**Oppgave 3**. (2 poeng) Hvilket av følgende komplekse tall er en rot i polynomet $P(z) = z^3 - 4z^2 + 5z$:

A) $z = 1 + i$

B) $z = 2 - i$

C) $z = 1 - i$

D) $z = -1 + i$

E) $z = 2i$

**Oppgave 4**. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{8x^2 + 9}{1 + x + 2x^2}}$ er lik:

A) $\sqrt{8}$

B) $\sqrt{9}$

C) $\sqrt{2}$

D) 2

E) 0

**Oppgave 5**. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \sin x}{\sin x - x}$ er lik:

A) 0

B) $-1$

C) 1

D) $-\infty$

E) $\infty$

**Oppgave 6**. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0^+} (2x)^{\sin x}$ er lik:

A) $-\infty$

B) 0

C) 1

D) 2

E) $\infty$

**Oppgave 7**. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = \arctan(\arctan x)$ er:

A) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \arctan^2 x}$

B) $f'(x) = \dfrac{\arctan x}{1 + x^2}$

C) $f'(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + \arctan^2 x}$

D) $f'(x) = \dfrac{\tan x}{(1 + \arctan^2 x)(1 + x^2)}$

E) $f'(x) = \dfrac{1}{(1 + \arctan^2 x)(1 + x^2)}$

*(Fortsettes på side 3.)*

**Oppgave 8**. (2 poeng) Den omvendte funksjonen til $f(x) = 2 + \ln(5x^2 + 1)$ på definisjonsområdet $D_f = [0, \infty)$ er:

A) $\frac{1}{5}(e^{x-2} - 1)$
B) $e^{5x^2+1} - 2$
C) $\sqrt{\frac{1}{5}(e^{x-2} - 1)}$
D) $e^{x+2} - 1$
E) $\sqrt{5(e^{x+2} - 1)}$

**Oppgave 9**. (2 poeng) La $f$ og $g$ være omvendte, deriverbare funksjoner. Anta at $f(1) = 2$ og at $g'(2) = 5$. Da har vi at:

A) $f'(1) = 5$
B) $f'(1) = 1/5$
C) $g'(1) = 2$
D) $f'(1) = 2$
E) $f'(1) = -5$

**Oppgave 10**. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2 + 17})$ er lik:

A) $-\infty$
B) $0$
C) $1$
D) $\sqrt{17}$
E) $\infty$

**Oppgave 11**. (3 poeng) La $f(x) = 5 + (2/x)$, og la $\epsilon > 0$ være gitt. Hvor stort må det reelle tallet $N$ være for at vi skal ha $|f(x) - 5| < \epsilon$ for alle reelle tall $x > N$?

A) $N$ må være større enn eller lik $\epsilon$
B) $N$ må være større enn eller lik $1/\epsilon$
C) $N$ må være større enn eller lik $2/(1 + \epsilon)$
D) $N$ må være større enn eller lik $2/\epsilon$
E) $N$ må være større enn eller lik $5 + (2/\epsilon)$

**Oppgave 12**. (3 poeng) Hvilken av følgende funksjoner er slik at $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ikke eksisterer?

A) $f(x) = x\sin(1/x)$
B) $f(x) = x^2\sin(1/x)$
C) $f(x) = \sin(e^{1/x})$
D) $f(x) = (\ln x)^{-1}$
E) $f(x) = |\sin(\sqrt{x})|$

*(Fortsettes på side 4.)*

**Oppgave 13**. (3 poeng) Hvilket av følgende tall er en tredjerot til det komplekse tallet $z = -4\sqrt{3} - 4i$:

A) $\sqrt{3} - i\sqrt{2}$
B) $2e^{i(5\pi/6)}$
C) $8e^{i(5\pi/6)}$
D) $8e^{i(\pi/18)}$
E) $2e^{i(7\pi/18)}$

**Oppgave 14**. (3 poeng) Anta at den reelle funksjonen $f$ oppfyller

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Da har vi at:

A) $a$ ligger i definisjonsområdet til $f$
B) $f$ er kontinuerlig i $a$
C) $f$ er deriverbar i $a$
D) $f$ er begrenset
E) Vi kan ikke konkludere med noe av dette

**Oppgave 15**. (3 poeng) Hvilket av følgende funksjonsuttrykk er ikke definert for noen reelle tall $x$:

A) $\ln(\sin x)$
B) $\arcsin(e^x - 1)$
C) $\ln(\ln(-x))$
D) $\ln(8x - x^2 - 16)$
E) $\arctan(\arctan(\arctan x))$

**Oppgave 16**. (3 poeng) La $f$ være en reell funksjon, og anta at det for hvert gitt, reelt tall $N > 0$ fins et reelt tall $M$ slik at $f(x) > N$ for alle $x < M$. Dette betyr at:

A) $f$ er kontinuerlig i punktet $x = M$
B) $\lim_{x\to M} f(x) = N$
C) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
D) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
E) $f$ har er vertikal asymptote i $x = M$

*(Fortsettes på side 5.)*

**Oppgave 17**. (3 poeng) En 10 meter lang stige sklir ned en vertikal vegg. Når øvre ende av stigen er 6 meter over bakken, beveger nedre ende av stigen seg med hastighet 1 m/s bortover langs den horisontale bakken. Hvor fort beveger bakre del av stigen seg nedover akkurat da?

A) $\frac{3}{4}$ m/s
B) $\frac{4}{3}$ m/s
C) $\frac{5}{4}$ m/s
D) $\frac{4}{5}$ m/s
E) 1 m/s

**Oppgave 18**. (3 poeng) Skråasymptoten til $f(x) = xe^{-1/x}$ når $x \to \infty$ er:

A) $y = x$
B) $y = -x$
C) $y = x + 1$
D) $y = x - 1$
E) $y = x - e$

**Oppgave 19**. (3 poeng) Du skal lage en rektangulær innhegning ved å bruke 50 meter gjerde. Langs *halvparten* av den ene siden på innhegningen skal det bygges en mur, så der trengs det ikke gjerde. Hva er det største arealet innhegningen din kan få?

A) 10000/49 $\text{m}^2$
B) 625/3 $\text{m}^2$
C) 205 $\text{m}^2$
D) 620/3 $\text{m}^2$
E) 635/3 $\text{m}^2$

**Oppgave 20**. (3 poeng) Anta at funksjonen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er slik at $f''(x)$ er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Hvis vi vet at $f'(x)$ har nøyaktig to nullpunkter i $(a, b)$, så kan vi konkludere med at:

A) $f$ har både et lokalt maksimum og et lokalt minimum i $(a, b)$
B) $f$ har minst ett lokalt ekstremalpunkt i $(a, b)$
C) $f$ har minst ett nullpunkt i intervallet $(a, b)$
D) Det finnes et intervall $I$ inneholdt i $[a, b]$ der $f$ er konveks
E) $f''(a)$ og $f''(b)$ er begge forskjellige fra 0

SLUTT