UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i	MAT1100 — Kalkulus.
Eksamensdag:	Fredag 11. oktober 2013.
Tid for eksamen:	15.00 – 17.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelsamling
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen består av 20 spørsmål. De 10 første teller 2 poeng hver, de 10 siste teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng. Svarene fører du inn på et eget svarark.

Oppgave 1. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = 2e^{i(7\pi/6)}$ kan skrives:

A) $z = 1 - \sqrt{3}i$
B) $z = -1 + \sqrt{3}i$
C) $z = -\sqrt{3} - i$
D) $z = \sqrt{3} - i$
E) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Oppgave 2. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = -5i$ kan skrives:

A) $z = -5e^{i(3\pi/2)}$
B) $z = \sqrt{5}e^{i(\pi/2)}$
C) $z = 5e^{i(3\pi/2)}$
D) $z = \sqrt{5}e^{i(3\pi/2)}$
E) $z = -5e^{i\pi}$

Oppgave 3. (2 poeng) Området i det komplekse planet bestående av alle punkter z som oppfyller $|z - 1| < 2$ er:

A) en rett linje gjennom punktet $z = 1$, vinkelrett på den reelle aksen
B) en sirkel med sentrum i punktet $z = -1$ og radius 2
C) en sirkel med sentrum i punktet $z = -1$ og radius 4
D) en sirkel med sentrum i punktet $z = 1$ og radius 4
E) en sirkel med sentrum i punktet $z = 1$ og radius 2

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. (2 poeng) Hvilket av følgende polynomer har $z = i$ som en rot?

A) $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$
B) $P(z) = (z^2 - 1)^2$
C) $P(z) = z^2 + z + 1$
D) $P(z) = z + 1$
E) $P(z) = z^2 - i$

Oppgave 5. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^5 - 5n^4}{7 + 5n^3 + 3n^5}$ er:

A) ∞ (den finnes ikke)
B) 0
C) 1
D) 1/7
E) 1/3

Oppgave 6. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ er:

A) 1
B) 0
C) -1
D) $\sqrt{2} - 1$
E) ∞ (den finnes ikke)

Oppgave 7. (2 poeng) La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved $f(x) = e^{x^2}$ for alle x. Da er den annenderiverte av f gitt ved:

A) $f''(x) = (2x)^2 e^{x^2}$
B) $f''(x) = e^{x^2}$
C) $f''(x) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$
D) $f''(x) = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2}$
E) $f''(x) = 2xe^{x^2}$

Oppgave 8. (2 poeng) La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved $f(x) = x^4 - 24x^2$. Da har f:

A) Nøyaktig ett vendepunkt, nemlig $x = 0$
B) Nøyaktig ett vendepunkt, nemlig $x = 2$
C) Nøyaktig ett vendepunkt, nemlig $x = 2$
D) Nøyaktig to vendepunkter, nemlig $x = 2$ og $x = -2$
E) Ingen vendepunkter

Oppgave 9. (2 poeng) La $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Da har f:

A) En vertikal asymptote i $x = 0$
B) Skråasymptoten $y = x$ når $x \to \infty$
C) Den horisonale asymptoten $y = 1$ når $x \to -\infty$
D) Den horisonale asymptoten $y = 1$ når $x \to \infty$
E) Den horisonale asymptoten $y = 0$ når $x \to \infty$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 10. (2 poeng) La funksjonen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være gitt ved $f(x) = \sin^2 x$. Da har f:

A) Ingen vendepunkter
B) Ett vendepunkt
C) Uendelig mange vendepunkter
D) Ingen nullpunkter
E) Ingen minimumspunkter

Oppgave 11. (3 poeng) Den deriverte til funksjonen $f(x) = \sin(e^{\cos x})$ er

A) $\cos(e^{\cos x})$
B) $(-\sin x)e^{\cos x}\cos(e^{\cos x})$
C) 1
D) $-\sin x \cos(e^{-\sin x})$
E) $\sin(e^{\cos x})e^{-\sin x}$

Oppgave 12. (3 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x + x^2 + \sin x}$ er:

A) 0
B) 1/3
C) 1/2
D) 1
E) -1

Oppgave 13. (3 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x}$ er:

A) 0
B) 1
C) e
D) $1/e$
E) $+\infty$

Oppgave 14. (3 poeng) La n være et naturlig tall. Hvilket av følgende utsagn er korrekt?

A) Ethvert reelt tall x har minst én reell n-te rot.
B) Hvis $z \neq 0$ er et komplekst tall, så ligger n-te røttene til z jevnt fordelt på en sirkel med sentrum origo i det komplekse plan.
C) Hvis $z \neq 0$ er et komplekst tall, så ligger n-te røttene til z på en rett linje gjennom origo i det komplekse plan.
D) Hvis $P(z)$ er et polynom av grad n med komplekse koeffisienter og det komplekse tallet w er en rot for P, så er også det konjugerte tallet $\overline{w}$ en rot for P.
E) Ethvert komplekst polynom av grad n har minst én reell rot.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 15. (3 poeng) De fire fjerderøttene til $z = 4e^{i(\pi/4)}$ er:

A) $w_0 = e^{i\pi/8}$, $w_1 = e^{i(5\pi/8)}$, $w_2 = e^{i(9\pi/8)}$ og $w_3 = e^{i(13\pi/8)}$
B) $w_0 = 2e^{i\pi/8}$, $w_1 = 2e^{i(5\pi/8)}$, $w_2 = 2e^{i(9\pi/8)}$ og $w_3 = 2e^{i(13\pi/8)}$
C) $w_0 = 2e^{i\pi/16}$, $w_1 = 2e^{i(9\pi/16)}$, $w_2 = 2e^{i(17\pi/16)}$ og $w_3 = 2e^{i(25\pi/16)}$
D) $w_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/8}$, $w_1 = \sqrt{2}e^{i(5\pi/8)}$, $w_2 = \sqrt{2}e^{i(9\pi/8)}$ og $w_3 = \sqrt{2}e^{i(13\pi/8)}$
E) $w_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/16}$, $w_1 = \sqrt{2}e^{i(9\pi/16)}$, $w_2 = \sqrt{2}e^{i(17\pi/16)}$ og $w_3 = \sqrt{2}e^{i(25\pi/16)}$

Oppgave 16. (3 poeng) Skråasymptoten til $f(x) = x + \dfrac{\cos x}{x}$ er:

A) $y = x - 1$
B) $y = x$
C) $y = x + 1$
D) $y = 2x$
E) $y = 2x + 1$

Oppgave 17. (3 poeng) Den største mulige definisjonsmengden til funksjonen $f : D_f \to \mathbf{R}$ gitt ved $f(x) = \sqrt{\ln x}$ er:

A) $D_f = (0, 1)$
B) $D_f = \mathbf{R}$
C) $D_f = (0, \infty)$
D) $D_f = (1, \infty)$
E) $D_f = [1, \infty)$

Oppgave 18. (3 poeng) La f være funksjonen fra oppgave 17. Da er f:

A) Kontinuerlig men ikke deriverbar i $x = 1$
B) Kontinuerlig og deriverbar i $x = 1$, med $f'(1) = 1$
C) Kontinuerlig og deriverbar i $x = 1$, med $f'(1) = 1/2$
D) Kontinuerlig og deriverbar i $x = 1$, med $f'(1) = 0$
E) Hverken kontinuerlig eller deriverbar i $x = 1$

Oppgave 19. (3 poeng) La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved $f(x) = xe^{x^2-2x}$ for alle x. Da har vi at:

A) f er voksende på hele $\mathbf{R}$
B) f er avtakende på hele $\mathbf{R}$
C) f har et maksimum
D) f har et minimum
E) f har både et maksimum og et minimum

Oppgave 20. (3 poeng) La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være definert ved $f(x) = 3x + 2$ for alle x, og la $\epsilon > 0$ være gitt. Hvilken δ er slik at $|x| < \delta$ medfører $|f(x) - f(0)| < \epsilon$, uansett størrelse av ϵ?

A) $\delta = \epsilon/3$
B) $\delta = \epsilon/2$
C) $\delta = \epsilon$
D) $\delta = \sqrt{\epsilon}$
E) $\delta = \epsilon^2$

SLUTT