UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Fredag 1. april 2011
Tid for eksamen:	15.00 – 17.00
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling, svarark
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 17 oppgaver, hver med 5 svaralternativer. Hver oppgave teller likt. Riktig avkrysset svar gir 1 poeng. Feil svar, intet svar, eller to eller flere kryss på samme oppgave gir 0 poeng. Skravér eventuelt helt over et kryss hvis du ombestemmer deg og vil velge et annet svaralternativ.

Oppgave 1

Lineæravbildningen $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er slik at

$$T(1,1) = (1,2,3) \qquad \text{og} \qquad T(1,-1) = (3,2,1)$$

Hva er matrisen til lineæravbildningen?

❏ A
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

❏ B
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

❏ C
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

❏ D
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❏ E
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

La $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være affinavbildningen gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x + 3 + y, -1 + x + 2y)$$

Med hvilken faktor multipliserer $\mathbf{F}$ arealer?

❏ A -3
❏ B -1
❏ C 0
❏ D 3
❏ E 5

Oppgave 3

La $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$\mathbf{G}(x, y) = (\cos(x - y), \sin(x + y))$$

Anta at $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er deriverbar, med gradient

$$\nabla f(0, 1) = (2, 3)$$

i punktet $(0, 1)$. La $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$ for alle $\mathbf{x}$. Hva er gradienten $\nabla h(\pi/2, 0)$ til h i punktet $(\pi/2, 0)$?

❏ A $(-2, 2)$
❏ B $(1, 0)$
❏ C $(2, -2)$
❏ D $(0, 1)$
❏ E $(2, 3)$

Oppgave 4

Hva er et uttrykk for lineariseringen til

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

i punktet $(x, y) = (1, 1)$? (Her er ln den naturlige logaritmen.)

❏ A $2x/(x^2 + y^2)$
❏ B $2y/(x^2 + y^2)$
❏ C $x + y$
❏ D $x + y - 2$
❏ E $x + y - 2 + \ln 2$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5

En kurve i $\mathbb{R}^2$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$$

for $t \in [0, 2]$. Hva er buelengden til kurven?

❏ A $2 \sin 2$
❏ B 2
❏ C 4
❏ D 2π
❏ E 8

Oppgave 6

La $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være skalarfeltet gitt ved

$$f(x, y) = x^3 + x^2 - y^2$$

og la den parametriserte kurven $\mathbf{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ være deriverbar i punktet $0 \in \mathbb{R}$, med $\mathbf{r}(0) = (-2/3, 0)$. La $u(t) = f(\mathbf{r}(t))$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Hva er $u'(0)$?

❏ A $-2/3$
❏ B $-4/9$
❏ C 0
❏ D $4/27$
❏ E Utilstrekkelig informasjon: ulike verdier av $\mathbf{r}'(0)$ gir forskjellige svar

Oppgave 7

La $\mathcal{C}$ være kurven i $\mathbb{R}^2$ parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, \sin t)$$

for $t \in [0, \pi]$, og la

$$f(x, y) = \sqrt{3y^2 + 1}$$

være et skalarfelt på $\mathbb{R}^2$. Hva er verdien til linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$? Hint: Husk at $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ og $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$.

❏ A 0
❏ B π
❏ C $3\pi/2$
❏ D $5\pi/2$
❏ E $\sqrt{3\pi^2 + 1}$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 8

La $\mathcal{C}$ være kurven i $\mathbb{R}^2$ parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^3)$$

for $t \in [-1, 1]$, og la

$$\mathbf{F}(x, y) = (\sin x, 1)$$

være et vektorfelt på $\mathbb{R}^2$. Hva er verdien til linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$?

❑ A 0
❑ B $2 - 2\cos 1$
❑ C 2
❑ D $2 + 2\cos 1$
❑ E $2\sqrt{2}$

Oppgave 9

La $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ være et vektorfelt på $\mathbb{R}^2$, der

$$P(x, y) = \frac{\sin y}{1 + x^2 \sin^2 y} \qquad \text{og} \qquad Q(x, y) = \frac{x \cos y}{1 + x^2 \sin^2 y}$$

Hvilken påstand er sann?

❑ A $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ og $\mathbf{F}$ er konservativt
❑ B $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, men $\mathbf{F}$ er ikke konservativt
❑ C $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ og $\mathbf{F}$ er konservativt
❑ D $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, men $\mathbf{F}$ er ikke konservativt
❑ E $\mathbf{F}$ er et gradientfelt, men ikke konservativt

Oppgave 10

Likningen

$$4x^2 - 8x - y^2 + 6y = 21$$

beskriver hvilket kjeglesnitt i xy-planet?

❑ A En parabel med brennvidde 1
❑ B En ellipse med sentrum i $(1, -3)$
❑ C En ellipse med halvakser 1 og 2
❑ D En hyperbel med asymptoter $y = \pm 2x$
❑ E En hyperbel med sentrum i $(1, 3)$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 11

La $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ være $\mathbb{R}^3$ minus origo, og la $f\colon A \to \mathbb{R}$ være skalarfeltet gitt ved $f(x,y,z) = \phi$, der (ρ, ϕ, θ) er kulekoordinatene til punktet (x,y,z) (ϕ er inklinasjonen). Hvilken påstand om nivåflaten

$$N_{\pi/4} = \{(x,y,z) \in A \mid f(x,y,z) = \pi/4\}$$

for f er sann?

❑ A $N_{\pi/4}$ er planet gitt ved likningen $z = \pi/4$
❑ B $N_{\pi/4}$ er inneholdt i planet der $x = y$
❑ C $N_{\pi/4}$ er en kuleflate med radius $\pi/4$
❑ D $N_{\pi/4}$ er inneholdt i kjegleflaten der $z^2 = x^2 + y^2$
❑ E $N_{\pi/4}$ er tom

Oppgave 12

Hva er verdien til dobbeltintegralet

$$\iint_R (\ln x + \ln y)\, dxdy$$

over rektangelet $R = [1,2] \times [1,e]$?

❑ A 0
❑ B $2(2\ln 2 - 1)$
❑ C $(e-1)(2\ln 2 - 1) + 1$
❑ D $2(e-1)(2\ln 2 - 1)$
❑ E $e - 1$

Oppgave 13

Hva er verdien til dobbeltintegralet

$$\iint_A y\, dxdy$$

der A er type I området i xy-planet hvor $y \geq x^2$ og $x^2 + y^2 \leq 2$?

❑ A 0
❑ B $4\sqrt{2}/15$
❑ C $11/15$
❑ D $8\sqrt{2}/15$
❑ E $22/15$

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 14

Hva er verdien til dobbeltintegralet

$$\iint_A (x^2 + y^2)\, dxdy$$

der A er sirkelskiven hvor $x^2 + y^2 \leq 1$? Hint: Bruk polarkoordinater.

❏ A $\pi/3$
❏ B $\pi/2$
❏ C $2\pi/3$
❏ D π
❏ E 2π

Oppgave 15

La A være sirkelskiven hvor $x^2+y^2 \leq 1$. Hva er arealet til grafen til funksjonen $f\colon A \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

der $(x, y) \in A$? Hint: Bruk polarkoordinater.

❏ A 0
❏ B π
❏ C $(2\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$
❏ D $\pi(2\sqrt{2} - 1)$
❏ E $(4\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$

Oppgave 16

Hva er arealet avgrenset av den enkle, lukkede kurven med parametrisering

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin t)$$

der $t \in [0, 2\pi]$? Hint: Bruk Greens teorem for vektorfeltet $\mathbf{F} = (P, Q)$ med $P(x, y) = 0$ og $Q(x, y) = x$, og husk at $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$.

❏ A 0
❏ B $\pi/2$
❏ C $3\pi/4$
❏ D π
❏ E $3\pi/2$

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 17

Hva er verdien til det uegentlige integralet

$$\iint_A \frac{1}{x^2y^2}\,dxdy$$

der $A = [1,\infty) \times [1,\infty)$ er området i xy-planet hvor $x \geq 1$ og $y \geq 1$?

❏ A 0
❏ B 1
❏ C 2
❏ D 3
❏ E 4

SLUTT