UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.
Eksamensdag:	Fredag 14. juni 2013.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 2b, 3 osv.) teller 10 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1 La A_a være matrisen

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$$

der $a \in \mathbb{R}$.

a) Avgjør for hvilke verdier av a matrisen A_a er inverterbar.

b) I det tilfellet der A_a ikke er inverterbar, skriv en kolonne i A_a som en lineærkombinasjone av to andre.

Oppgave 2 Vi betrakter potensrekken $f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2}$.

a) Finn konvergensområdet til rekken.

b) Summer rekken.

Oppgave 3
La A være ellipsoiden

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (2y)^2 + z^2 = 1\}.$$

Bruk Lagrange's multiplikatormetode til å finne punktene på A som ligger nærmest punktet $(1/2, 0, 0)$.

Oppgave 4 La B være matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 2.)

a) Finn egenverdiene og egenvektorene for matrisen B.

b) La $\mathbf{w} = (2, -5)$. Finn $\lim_{n\to\infty} B^n\mathbf{w}$.

Oppgave 5 La $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ og la $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\frac{x-x_0}{a})^2 + (\frac{y-y_0}{b})^2 \leq 1\}$ for $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ og $a, b > 0$. Videre, la $F = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være avbildingen $F(x, y) = (x_0 + ax, y_0 + by)$. Vis at F avbilder A på B og at F har en invers F^{-1} som avbilder B på A. Bruk F til å vise følgende formel for integrasjon i ellipsekoordinater: La $f(x, y)$ være en kontinuerlig funksjon på B. Da er

$$\int\int_B f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(x_0 + ar\cos(t), y_0 + br\sin(t))abrdrdt.$$

Oppgave 6

La $f(x, y, z) = z + 4x^2 - 8x + 4 + y^2 - 4y$, og la Z være mengden

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}.$$

a) La Γ være mengden $\Gamma = \{(x, y, z) \in Z : z = 0\}$. Hvilket kjeglesnitt fremstiller Γ?

b) Finn volumet av det begrensete området avgrenset av (x, y)-planet og Z.

Slutt