UKENS NØTT - UKE 10

LØSNING

Betrakt systemet

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}$$

der

- $a_{11}, a_{22}, a_{33} > 0$, mens resten av koeffisientene er negative
- Summen av koeffisientene i hver likning er positiv.

Vis at dette systemet har bare $x = y = z = 0$ som løsning.

Løsning 1. Vi kan selvfølgelig anta $|z| \geq |y| \geq |x|$. Anta at vi har en annen løsning (x, y, z) med $|z| > 0$. Da følger det at

$$\begin{aligned} 0 &= \left| a_{31}\frac{x}{z} + a_{32}\frac{y}{z} + a_{33} \right| \cdot |z| \\ &\geq |z|(a_{33} - |a_{32}| - |a_{31}|) \\ &= |z|(a_{33} + a_{32} + a_{31}) > 0 \end{aligned}$$

Dette er en motsigelse. Det følger at $x = y = z = 0$ er den eneste løsningen.

Løsning 2. Vi bruker at systemet har en entydig løsning hvis og bare hvis determinanten til matrisen $A = (a_{ij})$ er $\neq 0$. Merk at $\det A$ er en linær funksjon i hver a_{ij}. Koeffisienten til a_{11} er $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, men da $a_{22} > -a_{21} - a_{23} > -a_{23} > 0$ og $a_{33} > -a_{32} > 0$, har vi at

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > 0.$$

Vi ser at $\det A$ minker dersom a_{11} minker, og tilsvarende når a_{22} og a_{33} minker. Vi slutter at $\det A > \det B$ der B er en matrise der vi ha minket a_{11}, a_{22}, a_{33} maksimalt, altså der hver rad summeres til 0. Men dette betyr at kolonnene er linært avhengige (summen av dem er nullvektoren), så $\det B = 0$. Derfor er $\det A > 0$.

abdulmm@math.uio.no *johnco@math.uio.no*