UKENS NØTT - UKE 11

LØSNING

Løs likningen

$$\cos(x)^n - \sin(x)^n = 1$$

der n er et naturlig tall.

Løsning. Tar vi tilfellene $\sin(x) = 0$ eller $\cos(x) = 0$ først, ser vi at vi får løsninger

$$x = \begin{cases} k\pi, \text{ for } n \text{ par} \\ 2k\pi, & \text{for } n \text{ odde} \\ 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, & \text{for } n \text{ odde} \end{cases}$$

For $n = 1$ har vi $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$, så $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dermed er enten $\cos(x) = 0$ eller $\sin(x) = 0$. Altså ingen nye løsninger.

For $n = 2$ har vi $\cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(2x) = 1$, så $x = k\pi$ (allerede funnet).

Anta nå at $n \geq 2$. Ved tekantulikheten,

$$|\cos(x)^n - \sin(x)^n| \leq |\cos(x)^n| + |\sin(x)^n| \leq |\cos(x)^2| + |\sin(x)^2| = 1$$

med likhet kun for $\sin(x) = 0$ eller $\cos(x) = 0$. Derfor får vi ingen løsninger når $|\sin(x)| > 0$ og $|\cos(x)| > 0$.

abdulmm@math.uio.no *johnco@math.uio.no*