UKENS NØTT - UKE 12

LØSNING

La A og B være forskjellige reelle matriser slik at $A^3 = B^3$ og $A^2B = B^2A$. Kan matrisen $A^2 + B^2$ være invertibel?

Løsning. Nei. La $C = A - B$. Siden A og B er forskjellige, er minst en av kolonnene til C forskjellig fra nullvektoren. Kall denne vektoren for $v \neq 0$. Vi har

$$(A^2 + B^2)C = (A^2 + B^2)(A - B) = A^3 - B^3 + B^2A - A^2B = 0$$

Dette betyr spesielt at $(A^2 + B^2)v = 0$, så $(A^2 + B^2)x = 0$ har ikke-trivelle løsninger, og $A^2 + B^2$ kan derfor ikke være invertibel.

abdulmm@math.uio.no *johnco@math.uio.no*