UKENS NØTT - UKE 8

LØSNING

Betrakt tabellen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

der hvert element er summen av de tre tallene på raden ovenfor; hvis (i, j) betegner tallet i rad i, plass j, er (i, j) summen av de tre tallene $(i-1, j), (i-1, j-1), (i-1, j-2)$. Vis at hver rad fra linje 3 og nedover har minst ett partall i seg.

Løsning 1. Vi lager en ny tabell der vi skriver '0' for hvert partall og '1' for hvert oddetall:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Ser vi på de fire første tallene i rad 3 og nedover, vil disse se ut som

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & & & &
\end{array}$$

Observasjonen vi bruker er at tallet på plass (i, j) er bestemt av tallene $(i-1, j), (i-1, j-1), (i-1, j-2)$. Dette gjør at mønsteret vi ser er periodisk, og siden det er en 0'er i hver rad, må det dermed være et partall i hver rad i tabellen.

Løsning 2. Det er ikke så vanskelig å vise direkte at

$$(i, 3) = \binom{i}{2} \text{ og } (i, 4) = \binom{i}{3} + \binom{i-1}{2}$$

(Prøv selv!). Siden disse ligger på samme rad holder det å vise at minst et av dem er partall, eller ekvivalent at $(i, 3) \cdot (i, 4) \equiv 0 \mod 2$. Ganger vi ut og faktoriserer, har vi

$$(i, 3) \cdot (i, 4) = \frac{1}{12} i (i+3)(i-2)(i-1)^2 .$$

For å vise at dette uttrykket er $\equiv 0 \mod 2$ holder det å vise at $i(i+3)(i-2)(i-1)^2 \equiv 0 \mod 8$. Men dette er lett å sjekke direkte, ved å sette inn $i = 0, 1, 2, \ldots, 7$.

abdulmm@math.uio.no *johnco@math.uio.no*