UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Onsdag 15. juni 2011
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Hver deloppgave (1a, 1b, 1c etc.) teller like mye. Du må begrunne alle svar, og vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1

La $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

1a

Finn en invertibel matrise M og en diagonalmatrise D slik at $AM = MD$.

1b

Finn den inverse matrisen M^{-1}. Finn en diagonalmatrise E, med positive elementer på diagonalen, slik at $E^2 = D$.

1c

La $B = MEM^{-1}$. Regn ut B og vis at $B^2 = A$.

1d

Finn tre andre matriser X som løser likningen $X^2 = A$.

Oppgave 2

La $W \subset \mathbb{R}^2$ være mengden av par (x, y) med $x > 0$ og $y > 0$. La $f\colon W \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x)\,.$$

(Fortsettes på side 2.)

2a

Beregn de partiellderiverte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,.$$

Er disse kontinuerlige som funksjoner av $(x,y) \in W$?

2b

La $(\bar{x},\bar{y}) \in W$ være slik at $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$. Hvilken betingelse er, i følge det implisitte funksjonsteoremet for f, tilstrekkelig for at det skal finnes en åpen delmengde $U \subset \mathbb{R}$ med $\bar{x} \in U$, og en deriverbar funksjon $g\colon U \to \mathbb{R}$ med $g(\bar{x}) = \bar{y}$ og

$$f(x, g(x)) = 0$$

for alle $x \in U$?

2c

Vis at denne betingelsen er oppfylt for $(\bar{x},\bar{y}) = (4,2) \in W$. Finn den deriverte $g'(\bar{x}) = g'(4)$ til funksjonen g i $\bar{x} = 4$.

Oppgave 3

3a

Avgjør for hvilken verdi av $\lambda \in \mathbb{R}$ likningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y + z &= \lambda \\ x + z &= \lambda \\ x + y &= \lambda \end{aligned}$$

har en løsning (x,y,z), og finn løsningen i dette tilfellet.

3b

Funksjonen

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz$$

har et lokalt maksimumspunkt under bibetingelsen

$$g(x,y,z) = x + y + z = 3\,.$$

Finn dette lokale maksimumspunktet.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4

4a

Vis at

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{16}\,.$$

4b

La $b > 0$. Beregn trippelintegralet

$$\iiint_A \sqrt{b^2 - x^2 - y^2 - z^2}\,dxdydz$$

der $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$. Hint: Bruk kulekoordinater.

SLUTT