Løsningsforslag eksamen MAT1110 våren 2011

John Rognes

(1a) Matrisen $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ har karakteristisk polynom

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{bmatrix}) = \lambda^2 - 10\lambda + 9$$

med røtter $(10 \pm \sqrt{100-36})/2 = 5 \pm 4$. Egenverdiene til A er $\lambda_1 = 5 - 4 = 1$ og $\lambda_2 = 5 + 4 = 9$.

En egenvektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ for $\lambda_1 = 1$ oppfyller $(1I - A)\vec{v} = \vec{0}$, med koeffisientmatrise $\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Med andre ord er $x + y = 0$, så $\vec{v} = \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ for $y \neq 0$. En slik egenvektor er $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

En egenvektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ for $\lambda_2 = 9$ oppfyller $(9I - A)\vec{v} = \vec{0}$, med koeffisientmatrise $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Med andre ord er $x - y = 0$, så $\vec{v} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ for $y \neq 0$. En slik egenvektor er $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Svar: $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

(1b) Radreduserer $[M\ I_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ så $M^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Hvis $E = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ skal oppfylle $E^2 = D$ må $a^2 = 1$ og $d^2 = 9$, så $a = 1$ og $d = 3$. Altså er $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(1c)

$$B = MEM^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da er $B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A$.

Alternativt: $B^2 = MEM^{-1}MEM^{-1} = ME^2M^{-1} = MDM^{-1} = A$.

(1d) Fire muligheter for diagonalmatriser E med $E^2 = D$ er $\pm\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ og $\pm\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$. De tilsvarende produktene $X = MEM^{-1}$ er $\pm B$ og

$$\pm\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

(2a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln(y) - \frac{y}{x} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} - \ln(x)$$

Disse er kontinuerlige for $x, y > 0$.

(2b) Betingelsen er

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0\,.$$

(2c) For $(\bar{x}, \bar{y}) = (4, 2)$ er

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4,2) = \frac{4}{2} - \ln 4 = 2 - \ln 4 > 0$$

siden $e^2 > 4$.

Videre er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,2) = \ln 2 - \frac{2}{4} = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

så

$$g'(4) = \frac{\partial g}{\partial x}(4) = -\frac{(\partial f/\partial x)(4,2)}{(\partial f/\partial y)(4,2)} = -\frac{(\ln 2 - \frac{1}{2})}{(2 - \ln 4)}\,.$$

(3a) Radreduserer den utvidede matrisen

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & \lambda\\ 1 & 0 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 0 & \lambda\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & \lambda\\ 0 & -1 & 0 & \lambda-3\\ 0 & 0 & -1 & \lambda-3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & \lambda\\ 0 & 0 & 1 & 2\lambda-3\\ 0 & 0 & 0 & 3\lambda-6\end{bmatrix}$$

Likningssystemet har bare løsninger hvis $3\lambda - 6 = 0$, dvs. hvis $\lambda = 2$. Da får vi $z = 2\lambda - 3 = 1$, $y = \lambda - z = 2 - 1 = 1$ og $x = 3 - y - z = 3 - 1 - 1 = 1$, så $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Alternativt: To ganger den første likningen, $2x + 2y + 2z = 6$, og summen av de tre siste likningene, $2x+2y+2z = 3\lambda$, gir $3\lambda = 6$. Likningssystemet har altså bare en løsning når $\lambda = 2$. Differansen mellom den første likningen og hver av de tre andre likningene gir da $x = 3-\lambda = 1$, $y = 3 - \lambda = 1$ og $z = 3 - \lambda = 1$.

(3b) Gradientene er $\nabla f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ og $\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1)$. I et lokalt maksimumspunkt (x, y, z) med $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{0}$ finnes en Lagrange-multiplikator λ slik at $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$. Sammen med bibetingelsen $g(x, y, z) = 3$ er dette nettopp likningssystemet fra (3a), med den entydige løsningen $\lambda = 2$ og $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Det lokale maksimumspunktet må være $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Alternativt: Substituerer $z = 3 - x - y$, så $f(x, y, z) = xy + x(3 - x - y) + y(3 - x - y) = 3x+3y-x^2-xy-y^2$. I et lokalt maksimum er de partiellderiverte $3-2x-y = 0$ og $3-x-2y = 0$, med løsningen $x = y = 1$, som gir $z = 3 - 1 - 1 = 1$.

(4a) Substituerer $t = \sin u$, $dt = \cos u\, du$:

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos^2 u\, du$$

Bruker $\sin 2u = 2\sin u \cos u$:

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2u\, du$$

Bruker $\cos 4u = 1 - 2\sin^2 2u$:

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4u)\, du = \frac{1}{8}\Big[u - \frac{1}{4}\sin 4u\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}\,.$$

(4b) Bruker kulekoordinater:

$$\iiint_A \sqrt{b^2-x^2-y^2-z^2}\, dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{b} \sqrt{b^2-\rho^2}\cdot \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta$$
$$= 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi \cdot \int_0^b \rho^2\sqrt{b^2-\rho^2}\, d\rho$$

Her er

$$\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi = \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi} = 1-(-1) = 2$$

og

$$\int_0^b \rho^2\sqrt{b^2-\rho^2}\, d\rho = \int_0^1 b^2t^2\sqrt{b^2-b^2t^2}b\, dt = b^4\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\, dt$$

ved substitusjonen $\rho = bt$, $d\rho = b\, dt$. Trippelintegralet er

$$2\pi\cdot 2\cdot b^4\frac{\pi}{16} = \frac{\pi^2}{4}b^4\,.$$

Bemerkning: Den 4-dimensjonale ballen av punkter $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ med $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq b^2$ har “hypervolum” lik to ganger dette trippelintegralet, dvs. $\frac{\pi^2}{2}b^4$. Volumet av den 3-dimensjonale sfæren der $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = b^2$ er lik den deriverte av dette uttrykket, dvs. $2\pi^2b^3$.