# MAT1110: Oblig 1 våren 2011

John Rognes

(i)

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\right) \\ &= (z, -2y, x)\end{aligned}$$

og $\nabla f(1,1,1) = (1,-2,1)$.

(ii)

$$\begin{aligned}T_{\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \\ &= f(1,1,1) + (1,-2,1) \cdot (x-1, y-1, z-1) \\ &= x - 2y + z\,.\end{aligned}$$

(iii) Et vilkårlig punkt på grafen til $g$ har formen $(x,y,z)$ der $x \neq 0$ og $z = y^2/x$. Da er $f(x,y,z) = xz - y^2 = x(y^2/x) - y^2 = y^2 - y^2 = 0$, så punktet ligger på flaten $\mathcal{S}$.

(iv)

```
>> xd=-2:0.1:2;
>> yd=-1.4:0.1:1.4;
>> [x,y]=meshgrid(xd,yd);
>> g=y.^2./x;
>> surf(x,y,g)
>> xlabel('x-akse')
>> ylabel('y-akse')
>> zlabel('z-akse')
>> axis([-2 2 -2 2 -4 4])
```

(v)

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2) \\ v(t) &= |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) = (0, 2, 6t) \\ a(t) &= v'(t) = \frac{4t + 18t^3}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}\end{aligned}$$

(vi)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}(t) &= \mathbf{v}(t)/v(t) = \frac{(1,2t,3t^2)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \\
\mathbf{T}'(t) &= \frac{(0,2,6t)\sqrt{1+4t^2+9t^4} - (1,2t,3t^2)(4t+18t^3)/\sqrt{1+4t^2+9t^4}}{1+4t^2+9t^4} \\
&= \frac{(0,2,6t)(1+4t^2+9t^4) - (1,2t,3t^2)(4t+18t^3)}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}} \\
&= \frac{(-4t-18t^3, 2-18t^4, 6t+12t^3)}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Sjekker at

$$
\begin{aligned}
a(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t) &= \frac{4t+18t^3}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \frac{(1,2t,3t^2)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} + \sqrt{1+4t^2+9t^4} \frac{(-4t-18t^3, 2-18t^4, 6t+12t^3)}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}} \\
&= \frac{(4t+18t^3)(1,2t,3t^2) + (-4t-18t^3, 2-18t^4, 6t+12t^3)}{1+4t^2+9t^4} \\
&= \frac{(0, 2+8t^2+18t^4, 6t+24t^3+54t^5)}{1+4t^2+9t^4} \\
&= (0,2,6t) = \mathbf{a}(t)\,.
\end{aligned}
$$

(vii) For $(x,y,z) = \mathbf{r}(t) = (t,t^2,t^3)$ er $f(\mathbf{r}(t)) = f(x,y,z) = xz - y^2 = t \cdot t^3 - (t^2)^2 = 0$, så ethvert punkt på kurven $\mathcal{C}$ ligger på flaten $\mathcal{S}$.

(viii)

```
>> t=-1.4:0.1:1.4;
>> hold on
>> plot3(t,t.^2,t.^3)
```

Klikker på “Rotate 3D”, og justerer. Skriver ut med “Print Figure”.

(ix) Gradienten er $\nabla f(1,1,1) = (1,-2,1)$, enhetstangentvektoren er $\mathbf{T}(1) = (1,2,3)/\sqrt{14}$, og $\mathbf{T}'(1) = (-22,-16,18)/(14)^{3/2}$. Da er

$$
\begin{aligned}
\nabla f(1,1,1) \cdot \mathbf{T}(1) &= (1,-2,1) \cdot (1,2,3)/\sqrt{14} = (1-4+3)/\sqrt{14} = 0 \\
\nabla f(1,1,1) \cdot \mathbf{T}'(1) &= (1,-2,1) \cdot (-22,-16,18)/(14)^{3/2} = (-22+32+18)/(14)^{3/2} = 2/\sqrt{14} \\
\mathbf{T}(1) \cdot \mathbf{T}'(1) &= (1,2,3)/\sqrt{14} \cdot (-22,-16,18)/(14)^{3/2} = (-22-32+54)/(14)^2 = 0
\end{aligned}
$$

(Setning 3.1.6 sier at $\mathbf{T}(1)$ og $\mathbf{T}'(1)$ står normalt på hverandre, som passer med den siste utregningen. Eksempel 1 etter setning 3.2.1 viser at $\nabla f(1,1,1)$ og $\mathbf{T}(1) = \mathbf{v}(t)/v(t)$ står normalt på hverandre, som passer med den første utregningen.)

(x) Når $x = 0$ er betingelsen $f(x,y,z) = xz - y^2 = 0$ ekvivalent med $y^2 = 0$, som igjen er ekvivalent med $y = 0$. Det viser at alle punkter på formen $(0,0,z)$ også ligger på flaten $\mathcal{S}$. Linjen $\mathcal{L}$ er altså lik $z$-aksen, som krysser kurven $\mathcal{C}$ midt i figuren.