MAT1110: Oblig 1 våren 2011

John Rognes

Innleveringfrist: **Torsdag 17. februar 2011 klokken 14:30, i obligkassen i 7. etasje i Niels Henrik Abels hus.** Erfaringsmessig blir det lange køer rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere. Husk å bruke den offisielle obligforsiden ved innlevering! Dersom du på grunn av sykdom eller lignende har behov for å utsette innleveringen, må du sende søknad til Robin Bjørnetun Jacobsen (rom B718, NHA, e-post: studieinfo@math.uio.no, tlf. 22 85 59 07). Husk at sykdom må dokumenteres ved legeattest! Se forøvrig http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml for nærmere informasjon om reglement rundt obligatoriske oppgaver ved Matematisk institutt.

Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. **For å få besvarelsen godkjent må man ha 60% av full score eller bedre.** Alle utregninger skal vises. Det kan trekkes for manglende utregninger, unøaktige forklaringer eller feil svar, men også gis delvis score for delvis riktig løste oppgaver. Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg selv (for hånd eller på datamaskin), og gjenspeile din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Oppgavesettet består av 10 delpunkter, (i) til (x), hver verdt 10% av full score. I punktene (vi) og (ix) er det foreslått metoder for kontrollregning. Disse kontrollregningene teller ikke med i poengberegningen, men hvis du kontrollregner og får et fornuftig svar er nok den foregående utregningen også riktig.

— — —

(i) La $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x, y, z) = xz - y^2 \,.$$

Finn gradienten $\nabla f(\mathbf{x})$ i et generelt punkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$, og i det spesielle punktet $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$.

(ii) Finn lineariseringen $T_{\mathbf{a}}f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ til f i $\mathbf{a}$, uttrykt som en affin funksjon av $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(iii) La $A \subset \mathbb{R}^2$ være mengden av punkter (x, y) der $x \neq 0$. La $g\colon A \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$g(x, y) = y^2/x\,.$$

Grafen til g er flaten $\mathcal{G}$ i $\mathbb{R}^3$ som består av alle punkter $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ med $(x, y) \in A$ og $z = g(x, y)$. Vis at grafen til g er inneholdt i flaten $\mathcal{S}$ av alle punkter $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ med $f(x, y, z) = 0$.

(iv) Bruk MATLAB eller Python til å plotte grafen $\mathcal{G}$ til g som en flate (MATLAB `surf`) i xyz-rommet, for $-2 \leq x \leq 2$ og $-1.4 \leq y \leq 1.4$. Bruk intervaller med lengde 0.1 på både x- og y-aksen. Sett navn ("x-akse", "y-akse", "z-akse") på x-, y- og z-aksene. Beskjær bildet av grafen (MATLAB `axis`) til området der $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$ og $-4 \leq z \leq 4$.

(v) La $\mathbf{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ være kurven $\mathcal{C}$ parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)\,.$$

Finn hastigheten $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, farten $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$, akselerasjonen $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$ og baneakselerasjonen $a(t) = v'(t)$ til et punkt som har posisjonen $\mathbf{r}(t)$ ved tiden t.

(vi) Bestem enhetstangentvektoren $\mathbf{T}(t) = \mathbf{v}(t)/v(t)$ og dens deriverte $\mathbf{T}'(t)$, i et generelt punkt $\mathbf{r}(t)$ på kurven $\mathcal{C}$. (Som kontrollregning kan du sjekke at $\mathbf{a}(t) = a(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t)$.)

(vii) Vis at $f(\mathbf{r}(t)) = 0$ for alle t. Forklar hvorfor kurven $\mathcal{C}$ ligger på flaten $\mathcal{S}$.

(viii) Bruk MATLAB eller Python til å plotte kurven $\mathcal{C}$ i samme figur som i (iv), for $-1.4 \leq t \leq 1.4$. Bruk intervaller med lengde 0.1 i t-retningen. Drei på figuren slik at de positive x-, y- og z-aksene peker mer mot deg enn fra deg. Skriv ut figuren på papir.

(ix) Betrakt gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ til f, enhetstangentvektoren $\mathbf{T}(1)$ og dens deriverte $\mathbf{T}'(1)$ i punktet $\mathbf{a} = \mathbf{r}(1) = (1, 1, 1)$ hvor $t = 1$. Beregn skalarproduktene $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{T}(1)$, $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{T}'(1)$ og $\mathbf{T}(1) \cdot \mathbf{T}'(1)$. (Som kontroll kan du sjekke at to av resultatene er forenlige med setning 3.1.6 og eksempel 1 etter setning 3.2.1.)

(x) Flaten $\mathcal{S}$ inneholder en rett linje $\mathcal{L}$ i tillegg til grafen $\mathcal{G}$ til g. Løs likningen $f(x, y, z) = 0$ med $x = 0$ for å bestemme denne linjen. Tegn linjen $\mathcal{L}$ inn på utskriften fra (viii).

SLUTT