MAT1110: Oblig 2 våren 2011

John Rognes

5. april 2011

Innleveringfrist: Torsdag 28. april 2011 klokken 14:30, i obligkassen i gangen i 7. etasje i N. H. Abels hus.

Det blir ofte lang kø rett før fristen, så det er smart å levere tidligere. Husk å bruke den offisielle obligforsiden.

Dersom du har behov for å utsette innleveringen, på grunn av sykdom eller liknende, må du sende søknad til Robin Bjørnetun Jacobsen (rom B718, N. H. Abels hus, e-post: studieinfo@math.uio.no, tlf. 22 85 59 07). Sykdom må dokumenteres ved legeattest. Se

`http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml`

for reglementet for obligatoriske oppgaver ved Matematisk institutt.

Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. **For å få besvarelsen godkjent må man ha 50% av full score eller bedre.** Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg selv, og gjenspeile din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om å gi en muntlig redegjørelse.

Settet består av 10 oppgaver, hver verdt 10% av full score. Oppgavene (i) til (iv) er samlet i del A, oppgavene (v) til (vii) utgjør del B, og resten av oppgavene er del C. Hver oppgave er formulert som ett avsnitt. Resten av teksten introduserer notasjon eller liknende.

MATLAB-kommentar: MATLAB liker ikke 0 som indeks, så i oppgave (x) hopper vi for enkelhets skyld over kantene der $i = 0$ og $j = 0$.

Der det henvises til MATLAB kan du bruke Python i stedet.

Python-kommentar: Funksjonen `rref` er ikke innebygget i Python, så til oppgave (vii) og (ix) kan dere hente inn en UiO-implementert funksjon fra

`http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1110/v11/MAT1120lib.py`

Merk også at vektorer i Python er indeksert fra 0, ikke 1.

Del A: Oppdeling i $n \times n$ ruter

La $n \geq 1$ være et naturlig tall. Vi skal studere funksjoner $f\colon K \to \mathbb{R}$ der

$$K = [0, n] \times [0, n] \subset \mathbb{R}^2$$

er et kvadrat i uv-planet. Vi deler K i n^2 mindre kvadrater med hjørner $(i, j) \in \mathbb{R}^2$ der $0 \leq i \leq n$ og $0 \leq j \leq n$ er hele tall. Det er $N = (n+1)^2$ slike hjørner.

Oppgave (i): Bevis at for hvert naturlig tall k med $1 \leq k \leq (n+1)^2$ finnes det ett og bare ett par (i, j) av hele tall med $0 \leq i, j \leq n$ slik at

$$k = (i+1) + (n+1)j\,.$$

Husk å forklare både at et slikt par (i, j) finnes for hver k, og at dette paret er entydig bestemt av k.

Til en funksjon $f\colon K \to \mathbb{R}$ tilordner vi en vektor

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

som inneholder funksjonsverdiene til f i de N hjørnene. Mer presist er

$$x_k = f(i, j)$$

der $0 \leq i, j \leq n$ og $k = (i+1) + (n+1)j$, som ovenfor.

Oppgave (ii): Hvilken vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ tilordnes til den konstante funksjonen gitt ved $f(u, v) = 2$ for alle $(u, v) \in K$?

Betrakt funksjonen $f(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + du + ev + h$ der a, b, c, d, e, h er reelle konstanter.

Oppgave (iii): Vis at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v) = 2a + 2c$$

for alle $(u, v) \in K$.

La f være som ovenfor.

Oppgave (iv): Vis at

$$f(i, j-1) + f(i-1, j) - 4f(i, j) + f(i+1, j) + f(i, j+1) = 2a + 2c$$

for alle par (i, j) av hele tall med $0 < i, j < n$.

Heretter vil vi bruke lineærkombinasjonen

$$f(i, j-1) + f(i-1, j) - 4f(i, j) + f(i+1, j) + f(i, j+1)$$

som en tilnærmet verdi for uttrykket

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)$$

i punktet $(u,v) = (i,j)$. En to ganger kontinuerlig deriverbar funksjon f som oppfyller

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = 0$$

for alle (u,v) kalles en *harmonisk funksjon*.

Del B: Tilfellet $n = 3$

Betrakt tilfellet $n = 3$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
j=3 & x_{13} & - & x_{14} & - & x_{15} & - & x_{16} \\
 & | & & | & & | & & | \\
j=2 & x_{9} & - & x_{10} & - & x_{11} & - & x_{12} \\
 & | & & | & & | & & | \\
j=1 & x_{5} & - & x_{6} & - & x_{7} & - & x_{8} \\
 & | & & | & & | & & | \\
j=0 & x_{1} & - & x_{2} & - & x_{3} & - & x_{4} \\
 & & & & & & & \\
 & i=0 & & i=1 & & i=2 & & i=3
\end{array}$$

Likningssystemet som består av de $(n-1)^2 = 4$ likningene

$$f(i,j-1) + f(i-1,j) - 4f(i,j) + f(i+1,j) + f(i,j+1) = 0 \tag{1}$$

for $(i,j) = (1,1), (2,1), (1,2), (2,2)$, i de $N = (n+1)^2 = 16$ ukjente

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{16}) = (f(0,0), f(1,0), \dots, f(3,3))$$

kan skrives på matriseform som $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Oppgave (v): Finn 4×16 koeffisientmatrisen B (for hånd, eller med MATLAB).

Fortsett å betrakte tilfellet $n = 3$, og anta at funksjonen f er konstant lik 2 på randen av kvadratet K, slik at

$$f(i,j) = 2 \tag{2}$$

for alle (i,j) med $i = 0$, $i = 3$, $j = 0$ eller $j = 3$. Det er $4n = 12$ slike likninger, som involverer de ukjente $x_1, \dots, x_5, x_8, x_9, x_{12}, \dots, x_{16}$. De $4 + 12 = 16$ likningene i (1) og (2) kan skrives på matriseform som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der A er en 16×16 matrise. Likningene kan ordnes i en slik rekkefølge at diagonalelementene i A er lik 1 eller -4, for hver $1 \le k \le 16$. (La radene i B forekomme som rad $6, 7, 10, 11$ i A.)

Oppgave (vi): Finn koeffisientmatrisen A og høyresiden $\mathbf{b}$.

La $[C \mid \mathbf{d}]$ være den reduserte trappeformen til den utvidede matrisen $[A \mid \mathbf{b}]$.

Oppgave (vii): Beregn $[C \mid \mathbf{d}]$ med MATLAB. Forklar hvordan du kan se at likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning $\mathbf{x}$, og finn denne.

Kommentar: Entydigheten av løsningen $\mathbf{x}$ svarer til at funksjonen $f(u,v) = 2$ er den eneste harmoniske funksjonen $f\colon K \to \mathbb{R}$ som er konstant lik 2 på randen av kvadratet.

Del C: Tilfellet $n = 10$

Vi går heretter over til å betrakte tilfellet $n = 10$, så $N = 121$ og funksjonen

$$f\colon [0,10] \times [0,10] \to \mathbb{R}$$

modelleres av en vektor

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{121}) \in \mathbb{R}^{121}$$

med $x_k = f(i,j)$ for $k = (i+1) + 11j$, $0 \le i,j \le 10$. Anta at

$$f(i,j-1) + f(i-1,j) - 4f(i,j) + f(i+1,j) + f(i,j+1) = 0 \tag{3}$$

for alle $0 < i,j < 10$ (81 likninger), og at

$$f(i,0) = f(0,i) = i \qquad \text{og} \qquad f(i,10) = f(10,i) = 10 - i \tag{4}$$

for alle $0 \le i \le 10$ (40 likninger, pluss noen repetisjoner).

De $81 + 40 = 121$ likningene (3) og (4) kan skrives på matriseform som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der diagonalelementene i A er lik 1 eller -4. (Siden n er endret er A og $\mathbf{b}$ ikke lenger de samme som i oppgave (vi) og (vii).)

Oppgave (viii): Skriv ned MATLAB-kode som genererer 121×121-matrisen A og vektoren $\mathbf{b}$.

Oppgave (ix): Sjekk at `sum(sum(A)) = 40` og `sum(b) = 200`. Bruk MATLAB til å løse likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Hva er `sum(x)` ?

Oppgave (x): Bruk MATLAB `[u,v] = meshgrid(1:10,1:10)` og `surf(u,v,f)`, for en passende beregnet `f`, til å vise flaten gitt ved grafen til funksjonen $f(i,j) = x_k$ for $1 \le i,j \le 10$, der $k = (i+1) + 11j$. Legg ved en utskrift av figuren.

Kommentar: Bildet skal vise grafen til den entydige harmoniske funksjonen $f\colon K \to \mathbb{R}$ som oppfyller $f(u,0) = f(0,u) = u$ og $f(u,10) = f(10,u) = 10 - u$ på randen av $K = [0,10] \times [0,10]$.