UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Onsdag 1. juni 2011
Tid for eksamen:	9.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Hver deloppgave (1a, 1b, 2a, etc.) teller like mye. Du må begrunne alle svar, og vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1

La $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2 .$$

1a

Beregn gradienten $\nabla f(x, y)$ og finn de stasjonære punktene til f.

1b

Beregn Hesse-matrisen $Hf(x, y)$ og avgjør hvilke av de stasjonære punktene som er lokale minimumspunkter, lokale maksimumspunkter eller sadelpunkter.

Oppgave 2

La $0 \le a \le b$.

2a

Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_A 2\sqrt{b^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

der $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\}$.

(Fortsettes på side 2.)

2b

En kule med radius b er plassert med sentrum i $(0,0,0)$. Med et bor dreies det ut et hull tvers gjennom kulen, slik at alle punkter i avstand $< a$ fra z-aksen fjernes. Hva er volumet til legemet som står igjen, når hullet har høyde $2\sqrt{b^2-a^2} = 6$ cm?

Oppgave 3

La $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

3a

Finn egenverdiene $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ til A. Hint: $\lambda_2 = 2$.

3b

Finn en invertibel matrise M og en diagonalmatrise D slik at $AM = MD$.

3c

La $\{\vec{r}_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en følge vektorer i $\mathbb{R}^3$ gitt ved $\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\vec{r}_{n+1} = A\vec{r}_n$ for alle $n \geq 0$. Finn en lukket formel for $\vec{r}_n$.

3d

Vektorene

$$\vec{x}_n = \frac{1}{(2+\sqrt{2})^n}\,\vec{r}_n$$

nærmer seg en grense i $\mathbb{R}^3$ når $n \to \infty$. Finn denne grensen.

Oppgave 4

La $W \subset \mathbb{R}^2$ være mengden av par (x,y) med $x > 0$ og $y > 0$. La $\vec{F}\colon W \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} y\ln(x) \\ x\ln(y) \end{bmatrix}.$$

4a

Beregn Jacobi-matrisen $\vec{F}'(x,y)$.

(Fortsettes på side 3.)

4b

La $\vec{p} = (x, y) \in W$ og $\vec{q} = \vec{F}(\vec{p})$. Hvilken betingelse på $\vec{F}'(\vec{p})$ er, i følge det omvendte funksjonsteoremet for $\vec{F}$, tilstrekkelig for at det skal finnes åpne delmengder $U \subset W$ og $V \subset \mathbb{R}^2$, med $\vec{p} \in U$ og $\vec{q} \in V$, slik at restriksjonen $\vec{F} \colon U \to V$ har en omvendt funksjon $\vec{G} \colon V \to U$?

4c

Vis at denne betingelsen er oppfylt for $\vec{p} = (2, 1) \in W$. Finn Jacobi-matrisen $\vec{G}'(\vec{q}) = \vec{G}'(\ln(2), 0)$ til den omvendte funksjonen i $\vec{q} = (\ln(2), 0)$.

SLUTT