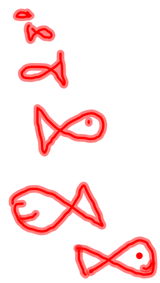
[Lineære likningssystemer, koeffisientmatrise, matriseform, utvidet matrise, radoperasjoner, radekvivalente matriser, trappeform, redusert trappeform, Gauss-eliminasjon, pivotelementer, pivotrader, pivotsøyler, løsninger til $C\vec{x}=\vec{d}$ der $[C|d]$ er på redusert trappeform, entydighet av redusert trappeform.]

notater mangler pga teknisk feil



MATLAB eks:

```
>> A = [-2 1 ; 1 -2];
>> b = [1 ; 4];
>> [A b]
```

$$\text{ans} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 &= -7 \end{aligned} \right)$$

```
>> rref([A b])
```

$$\text{ans} = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2} \;\; \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \right] \qquad \left(\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 4 \end{aligned} \right)$$

Homogene likninger

Lineært likningssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Homogent likningssystem

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

alltid en eller flere løsninger:

$\vec{x} = \vec{0}$ (etc)

Setning 4.4.7

Anta at $A\vec{x} = \vec{b}$ har (minst) en løsning $\vec{x} = \vec{x}_p$, slik at $A\vec{x}_p = \vec{b}$.
($\vec{x}_p$ er en spesiell/partikulær løsning)

Da kan enhver løsning $\vec{x}$ til $A\vec{x} = \vec{b}$ skrives som en sum

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$$

der $\vec{x}_h$ er en løsning i $A\vec{x} = \vec{0}$, dvs. $A\vec{x}_h = \vec{0}$.
($\vec{x}_h$ er en homogen løsning)

Omvendt, er enhver slik sum

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$$

der $A\vec{x}_h = \vec{0}$ en løsning i $A\vec{x} = \vec{b}$.

$$\{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}\} = \{\vec{x}_p + \vec{x}_h \mid A\vec{x}_h = \vec{0}\}$$

Bevis:

Hvis $A\vec{x}_p = \vec{b}$, $A\vec{x}_h = \vec{0}$ og $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$

er $A\vec{x} = A(\vec{x}_p + \vec{x}_h) = A\vec{x}_p + A\vec{x}_h = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$.

Omvendt, hvis $A\vec{x}_p = \vec{b}$ og $A\vec{x} = \vec{b}$ la $\vec{x}_h = \vec{x} - \vec{x}_p$ så $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$ og

$$A\vec{x}_h = A(\vec{x} - \vec{x}_p) = A\vec{x} - A\vec{x}_p = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Simultane likningssystemer

Vil ofte løse k forskjellige likningssystemer

$$A\vec{x}_1 = \vec{b}_1, A\vec{x}_2 = \vec{b}_2, \ldots, A\vec{x}_k = \vec{b}_k$$

med samme $m \times n$ koeffisientmatrise A

og k forskjellige høyresider $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k \in \mathbb{R}^m$.

Søker de k løsningene $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

Kunne ~~løse~~ radredusere

$$\left.\begin{array}{l} [A|b_1] \sim [C_1|d_1] \\ [A|b_2] \sim [C_2|d_2] \\ \quad\vdots \\ [A|b_k] \sim [C_k|d_k] \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{hver for seg} \\ \text{redusert trappeform}\end{array}$$

Anta $m = n$ og at $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for hver $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$\iff C_1 = C_2 = \cdots = C_k = I_n$

Da er det de <u>samme radoperasjonene</u> som brukes for å komme fra

$$[A|\vec{b}_s] \text{ til } [I_n|\vec{d}_s]$$

for $s = 1, 2, \ldots, k$.

Danner k-foldig utvidet matrise

$$[A \mid \vec{b}_1 \mid \vec{b}_2 \mid \cdots \mid \vec{b}_k]$$

og radreduserer til

$$[C \mid \vec{d}_1 \mid \vec{d}_2 \mid \cdots \mid \vec{d}_k]$$ på redusert trappeform

Hvis $C = I_n$ er betingelsene oppfylt, og løsningene er $\vec{x}_1 = \vec{d}_1, \vec{x}_2 = \vec{d}_2, \ldots, \vec{x}_k = \vec{d}_k$.

<u>Eks</u> $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad A\vec{x}_s = \vec{b}_s \quad s = 1,2,3$

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid \vec{b}_1 \mid \vec{b}_2 \mid \vec{b}_3]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c|c|c} -2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -6 & -7 & -8 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & -2 & -6 & -7 & -8 \\ \boxed{-2} & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \; +2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & -2 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & \boxed{-3} & -9 & -12 & -15 \end{array}\right] \; -\tfrac{1}{3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & \boxed{-2} & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right] \; +2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{I_2} \quad \vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \vec{x}_3$$

Trappeform

$k = 2$ antall pivotelementer (= rangen til matrisen A)

$$
\begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ \vdots \\ m
\end{array}
\left\{
\begin{array}{cccc|c}
0 & 1 & ? & ? & \\
0 & 0 & 0 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
\right.
$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n} + 1$

$\uparrow s_1 \qquad \uparrow s_k$

Pivotelementene er i $(1, s_1), (2, s_2), \ldots, (k, s_k)$

$1 \leq i \leq k$ pivotrad

$$\underline{x_{s_i}} + \underline{c_{i,s_i+1} x_{s_i+1} + \ldots + c_{i,n} x_n} = b_i$$

LH 4.5 : Inverse matriser

A $m \times n$ matrise

lineær transformasjon $\vec{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{x} \mapsto \vec{T}(\vec{x}) = A\vec{x}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, bend left, "\vec{T}"] & \mathbb{R}^m \arrow[l, bend left, dashed, "\vec{S}"] \end{tikzcd}$$

$$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$$

? finn $\vec{x}$ $\longleftarrow \vec{S} \longrightarrow$ gitt $A\vec{x} = \vec{b}$

Hvis $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning $\vec{x}$ for hver $\vec{b}$ er regelen $\vec{b} \longmapsto \vec{S}(\vec{b}) = \vec{x}$ der $A\vec{x} = \vec{b}$

en lineærtransformasjon

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{S} \mathbb{R}^n,$$

og er gitt ved multiplikasjon med en matrise B.

Hva er relasjonen mellom A og B?

De er <u>inverse matriser</u>.

La A være en kvadratisk $n \times n$-matrise.

Def En $n \times n$-matrise B er den inverse matrisen til A hvis

$$AB = I_n \quad \text{og} \quad BA = I_n .$$

$$\left(I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \text{ er identitetsmatrisen.} \right)$$

Den inverse matrisen er entydig, hvis den eksisterer:

Anta B og C er inverse matriser til A.

$$AB = I_n = BA \quad \text{og} \quad AC = I_n = CA$$

$$B = BI_n = BAC = I_n C = C.$$