LH 5.6 Newtons metode i flere variable

$F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deriverbar

søker $x \in \mathbb{R}^m$: $F(x) = 0$.

La $x_0 \in \mathbb{R}^m$ være en tilnærmet løsning.

Lineariseringen til F i x_0 er:

$$(T_{x_0}F)(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

Prøver å løse $(T_{x_0}F)(x) = 0$ for å finne en bedre tilnærming til en løsning av $F(x) = 0$.

$$0 = (T_{x_0}F)(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

$$F'(x_0)(x - x_0) = -F(x_0)$$

antar $F'(x_0)$-er invertibel

$$x - x_0 = -F'(x_0)^{-1}F(x_0)$$

$$\boxed{x_1 = x_0 - F'(x_0)^{-1}F(x_0)}$$

Iterativt, hvis $F'(x_n)$ er invertibel

lar vi $\boxed{x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n)}$

for alle $n \geq 0$.

<u>Def</u> <u>Newtons metode</u> anvendt på

$F: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ med startverdi $x_0 \in \mathbb{R}^m$

gir følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ i $\mathbb{R}^m$ den

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n).$$

Merk: La $G(x) = x - F'(x)^{-1}F(x)$

Da er $G: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ og

$$x_{n+1} = G(x_n).$$

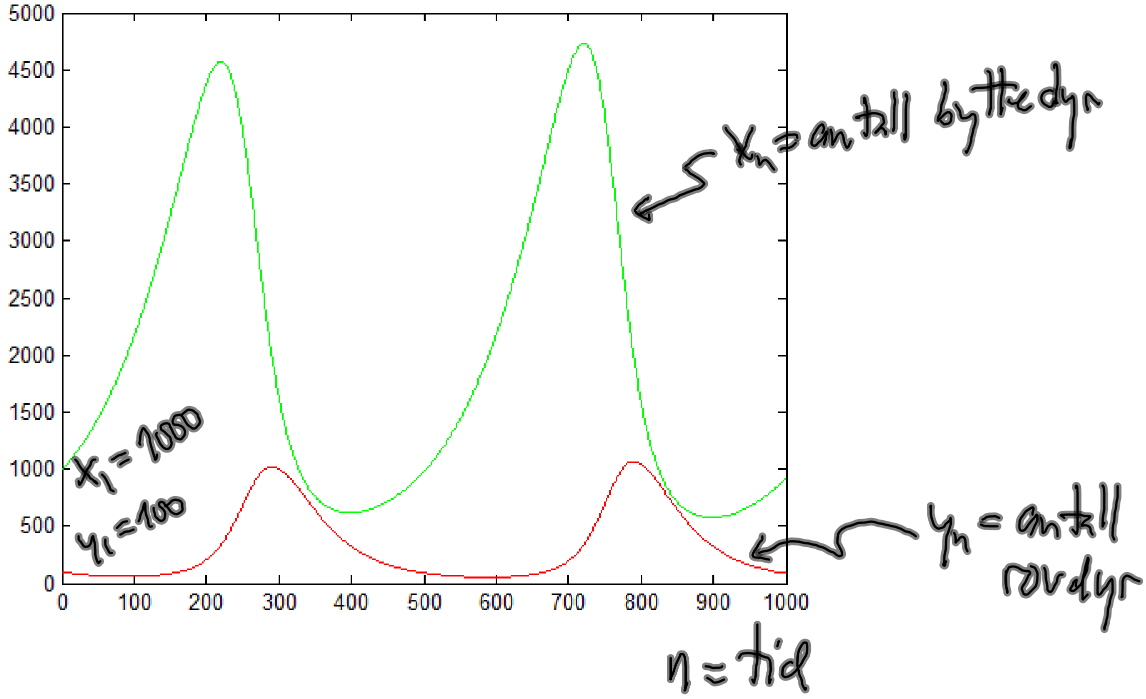
<u>Eksempel</u> Så på interasjonen

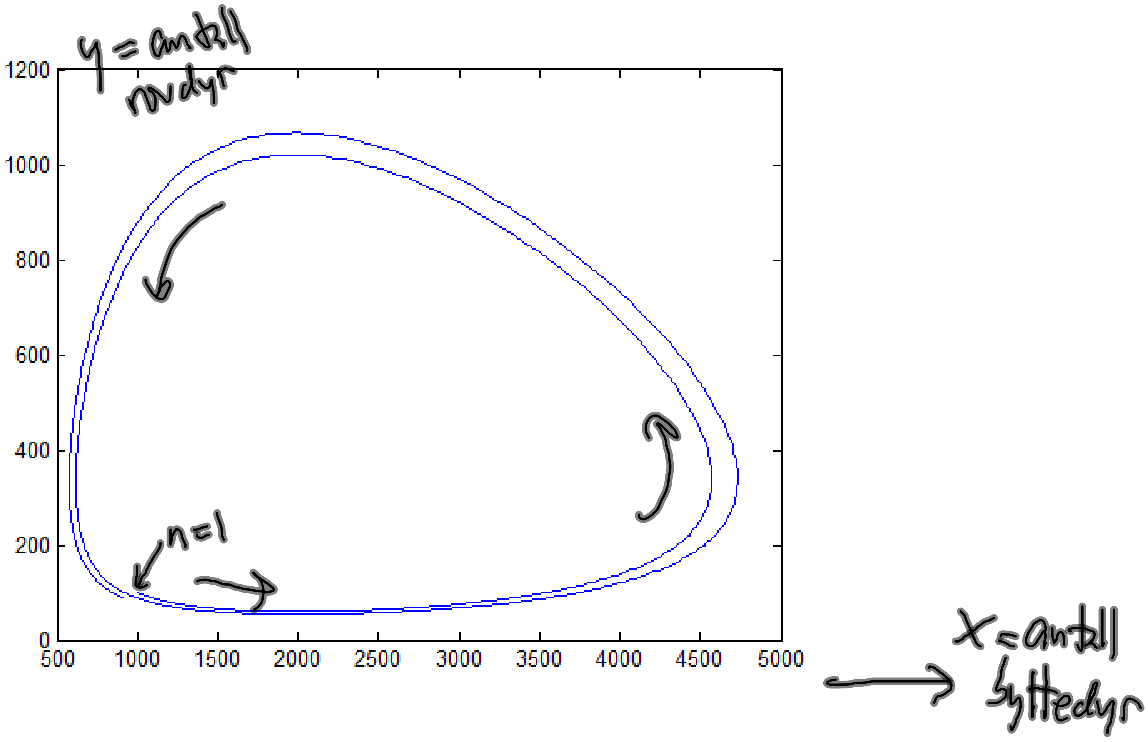
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto{G} \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cxy + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

$a = 1.01$
$b = 3 \cdot 10^{-5}$
$c = 10^{-5}$
$d = 0.98$

Finnes det $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

med $G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?


5000
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
$x_1 = 1000$
$y_1 = 100$
x_n = antall byttedyr
y_n = antall rovdyr
n = tid


y = antall rovdyr
n=1
x = antall byttedyr
1200
1000
800
600
400
200
0
500 1000 1500 2000 2500 3000 3500 4000 4500 5000

Omskriver $G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ som

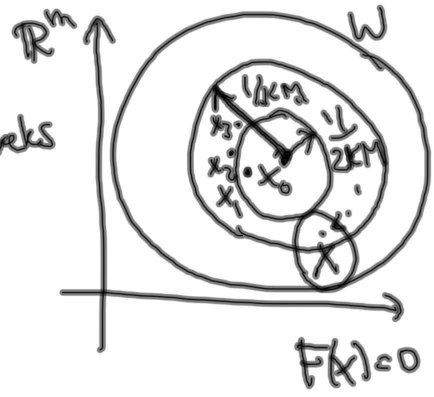
$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} (a-1)x - bxy \\ cxy + (d-1)y \end{pmatrix}}_{F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = 0$$

$$F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (a-1)-by & -bx \\ cy & cx+(d-1) \end{bmatrix}$$

```
x(1) = x1;                          % r_1 = (x1, y1) initial guess
y(1) = y1;

for n=1:N-1
    u = [x(n); y(n)];                                  % old point r(n)

    v = [(a-1)*x(n) - b*x(n)*y(n); c*x(n)*y(n)+(d-1)*y(n)]; % value
    A = [(a-1)-b*y(n) -b*x(n); c*y(n) c*x(n)+(d-1)];       % derivative

    u = u - A\v;                                       % new point r(n+1)

    x(n+1) = u(1);
    y(n+1) = u(2);
end

end
```

$$\vec{x}_{n+1} = \underbrace{\vec{x}_n}_{=\,u} - \underbrace{\vec{F}'(\vec{x}_n)^{-1}}_{A^{-1}} \underbrace{\vec{F}(\vec{x}_n)}_{V}$$

Kantorovitsj' teorem



Gitt $W \subseteq \mathbb{R}^m$ åpen, konveks

$F: W \to \mathbb{R}^m$ deriverbar

$x_0 \in W$

Anta at det finnes $M, K > 0$ slik at

$$\forall x, y \in W : \quad |F'(x) - F'(y)| \leq M|x-y|$$

og

$$\forall v \in \mathbb{R}^m : \quad |F'(x_0)v| \geq \frac{1}{K}|v|$$

Anta og at

$$\overline{B}(x_0, \tfrac{1}{KM}) \subseteq W$$

og $\quad |x_1 - x_0| \leq \frac{1}{2KM}$.

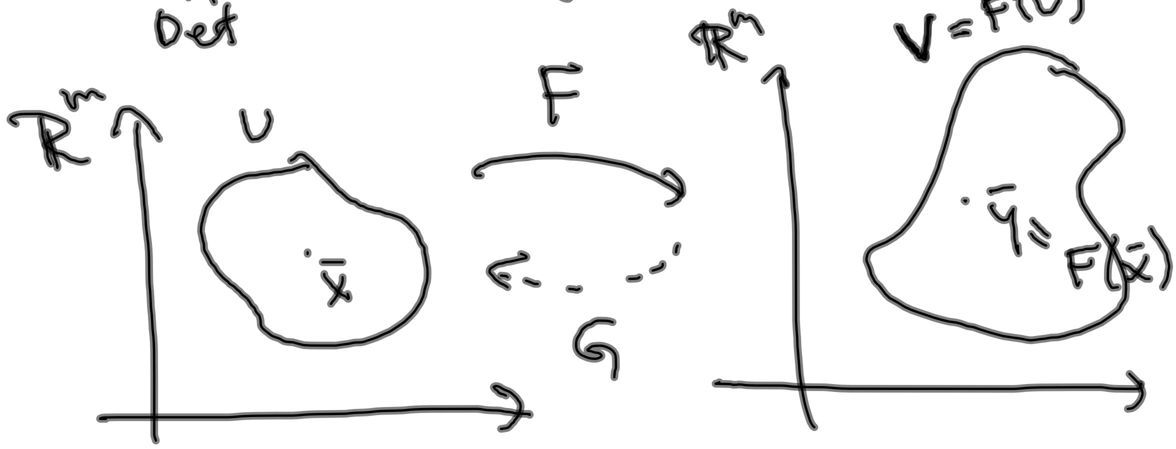
der $x_1 = x_0 - F'(x_0)^{-1}F(x_0)$.

Da er $F'(x)$ invertibel for alle $x \in B(x_0, \frac{1}{KM})$, følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ er veldefinert og ligger i $B(x_0, \frac{1}{KM})$ og konvergerer mot et punkt

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{når } n \to \infty$$

der $F(x) = 0$.

LH 5.7 Det omvendte funksjonsteoremet



Når er $F: U \to V = F(U)$ injektiv, slik at $F(x) = y$ har en entydig løsning x for hver $y \in V$?

(Da kan vi definere en omvendt funksjon $G: V \to U$ ved at $G(y) = x$ der x er løsningen i $F(x) = y$.)

Vet at hvis

$$F(x) = Ax + c$$

er affin, har $F(x) = y$ løsningen

$$x = G(y) = A^{-1}(y - c)$$

hvis A er invertibel.

F er injektiv $\Leftrightarrow$ A er invertibel.

Kan tilnærme en generell deriverbar

$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nær $\bar{x}$ med dens

linearisering

$$(T_{\bar{x}}F)(x) = F(\bar{x}) + F'(\bar{x})(x-\bar{x})$$

$$= \underbrace{F'(\bar{x})\,x}_{A\,x} + \underbrace{F(\bar{x}) - F'(\bar{x})\bar{x}}_{C}$$

Så lineariseringen er injektiv

$\iff$ $F'(\bar{x})$ er invertibel.

Omvendt funksjonsteorem 5.7.2

Gitt $W \subseteq \mathbb{R}^m$ åpen

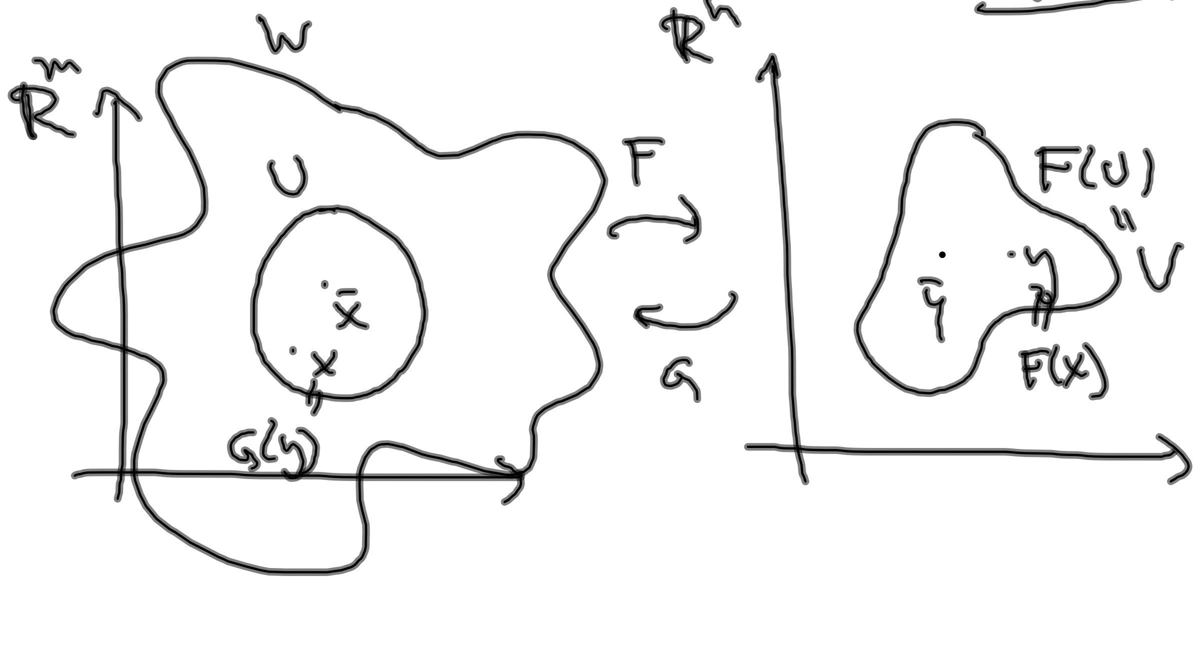
$F : W \to \mathbb{R}^m$ kontinuerlige partielle deriverte

$\bar{x} \in W$

Anta $F'(\bar{x})$ er invertibel

Da finnes en åpen U med $\bar{x} \in U \subset W$

slik at $F|U : U \to \mathbb{R}^m$ er injektiv.



Videre, la $\bar{y} = F(\bar{x})$ og $V = F(U)$.

Da har $F : U \longrightarrow V$ en invers/

omvendt funksjon $G : V \longrightarrow U$

slik at $G(y) = x \iff F(x) = y$;

for $x \in U$ og $y \in V$.

Da er V åpen i $\mathbb{R}^m$ $\bar{y} \in V \subset \mathbb{R}^m$

$G : V \to U$ er deriverbar i $\bar{y}$

og $\underline{G'(\bar{y}) = F'(\bar{x})^{-1}}$!

Bevis-skisse

Må vise at $F(x)=y$ har en og bare en løsning x ~~fo~~ (nær $\bar{x}$) for hver y (nær $\bar{y}$).

Ok for affine F. Kan spesialisere til tilfellet $\bar{x}=\bar{y}=\vec{0}$ og $F'(\bar{x})=I_m$.

$$(T_{\bar{x}}F)(x) = x.$$

Gitt y nær $\bar{y}=0$ skriver om likningen

$$F(x)=y$$

som et fikspunkt-problem

$$G(x) = x - F(x) + y = x$$

Deriverbarhet i $\bar{x}$ gir at G er en kontraksjon nær $\bar{x}$.

Banachs fikspunktteorem gir da at

$G(x)=x$ har en entydig løsning

$\iff F(x)=y$ —— " —— .

$\square$

Siden $G(F(x)) = x$ for alle $x \in U$,

vil

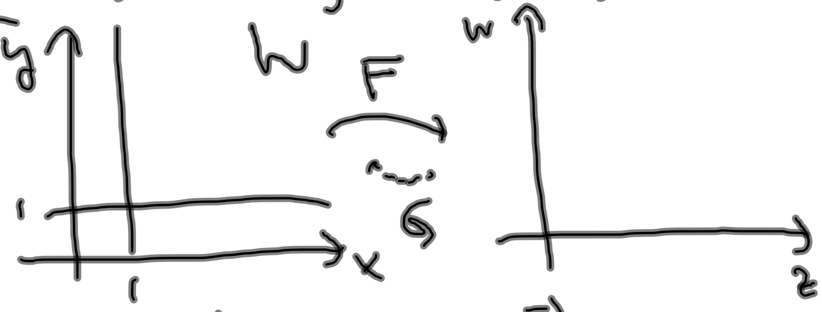
$$G'(F(\bar{x})) \cdot F'(\bar{x}) = I_m$$

ved kjerneregelen:

$$G'(\bar{y}) \cdot F'(\bar{x}) = I_m$$

$$\Longrightarrow \quad G'(\bar{y}) = F'(\bar{x})^{-1}.$$

Eksempel $W = \{(x,y) \mid x,y > 1\}$



$\vec{x} = (x,y) \longmapsto \vec{y} = (z,w)$

La

$$\underline{F}(x,y) = (x^y, y^x).$$
$$= (e^{y \ln x}, e^{x \ln y}).$$

Hvis $x^y = z$ og $y^x = w$, der z,w er kjent, hva er x og y?

$$(x,y) = \underline{G}(z,w).$$

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{y}{x} \cdot x^y & \ln x \cdot x^y \\ \ln y \cdot y^x & \frac{x}{y} \cdot y^x \end{bmatrix}$$

$\bar{x} = (2,4) \longmapsto \bar{y} = (2^4, 4^2) = (16,16)$

$x = 2, y = 4$ $\qquad$ $z = 16, w = 16$

$$\det F'(x,y) = x^y y^x - \ln x \ln y \, x^y y^x$$
$$= (1 - \ln x \ln y) x^y y^x$$

$\neq 0$ når $\ln x \ln y \neq 1$.

$(x,y) = (2,4)$ $\ln 2 \cdot \ln 4 \approx 0.9609 < 1$

Omvendte funksjonsteoremet: for $(z,w) \in V$ nær $(16,16)$ finnes det en entydig løsning $(x,y) \in U$ nær $(2,4)$ til likningssystemet

$$\begin{cases} x^y = z \\ y^x = w \end{cases}$$

med
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{linearisering}]{} \approx G\begin{pmatrix} 16 \\ 16 \end{pmatrix} + G'(16,16)\begin{bmatrix} z-16 \\ w-16 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{16(1-\ln 2 \ln 4)}\begin{bmatrix} 1/2 & -\ln 2 \\ -\ln 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z-16 \\ w-16 \end{bmatrix}$$
$$= \ldots$$

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{y}{x} \cdot x^y & \ln x \cdot x^y \\ \ln y \cdot y^x & \frac{x}{y} \cdot y^x \end{bmatrix}$$

$$F'(2,4) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 16 & \ln 2 \cdot 16 \\ \ln 4 \cdot 16 & \frac{1}{2} \cdot 16 \end{bmatrix}$$

$$G'(16,16) = F'(2,4)^{-1} = \frac{1}{16(1-\ln 2 \ln 4)}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\ln 2 \\ -\ln 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

<u>Eks</u> $z = w = 16{,}1$. En tilnærmet løsning (x,y) til $\begin{cases} x^y = 16.1 \\ y^x = 16.1 \end{cases}$

<u>nær</u> $(2,4)$ er

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} 16.1 \\ 16.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{16(1-\ln 2 \ln 4)} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1.969 \\ 4.098 \end{bmatrix}.$$

$1.969^{4.098} \approx 16.07$

$4.098^{1.969} \approx 16.08$