LH 4.6 Lineærkombinasjoner og basis

- $A\vec{x} = \vec{b}$ — utenfra / innenfra

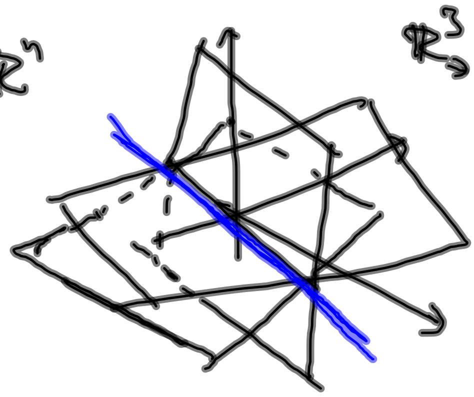
- lineært spenn,
- lineær uavhengighet

} basis

Lineært likningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

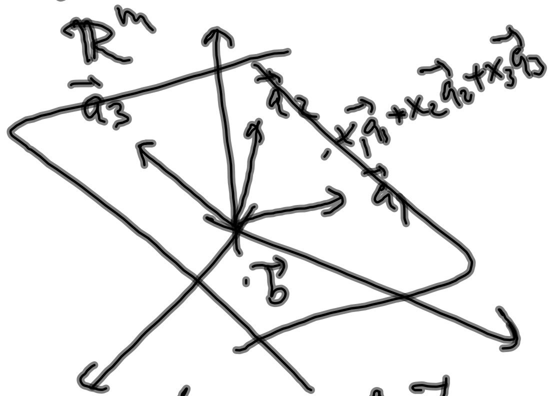
- Hver likning legger en betingelse på $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^3 \ni \vec{x}$

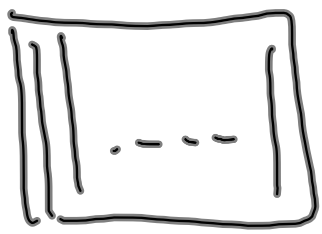


Innenfra: Hvilke $\vec{b}$ kan skrives på formen $A\vec{x}$?
$\in \mathbb{R}^m$

Eks Søylene i A er på formen $A\vec{e}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$



A har søyler $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$



Vektorer på formen $A\vec{x}$

$$= A(x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = x_1 A\vec{e}_1 + \ldots + x_n A\vec{e}_n$$

$$= \underbrace{x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n}_{\text{er lineærkombinasjoner av søylene i } A}$$

<u>Lineært spenn</u>

Hvilke $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ er lineærkombinasjoner av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$?

<u>Def</u> <u>Spennet</u> av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er mengden

$$Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \{ x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

$A\vec{x} = \vec{b}$ har løsning

$\iff$ $\vec{b}$ er en lin. komb. av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

$\iff$ $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Gitt n vektorer $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ og $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Er $\vec{b}$ er i spennet av $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$?

$\Updownarrow$

$\vec{b}$ er en lineærkombinasjon $x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n$

$\Updownarrow$

$A\vec{x} = \vec{b}$ har en løsning

Svar: Utvidet matrise $[A \mid b]$

radredusere $\sim [C \mid d]$ på trappeform

$\Updownarrow$ d er ikke en pivotsøyle, $\cancel{\begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & 1 \end{bmatrix}}$

Når er $\mathrm{Sp}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^m$?

$\Updownarrow$

$\vec{b}$ er i spennet av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ for hver $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

$\Updownarrow$

$A\vec{x} = \vec{b}$ har en løsning for hver $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

$[A \mid \cancel{b}] \sim [C \mid \cancel{d}]$

trappeform

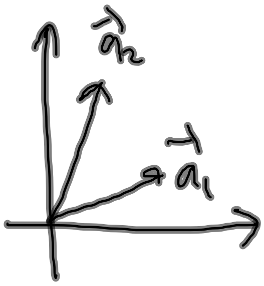
$\Updownarrow$

C har ett pivotelement i hver rad

$m \times n$ matriser

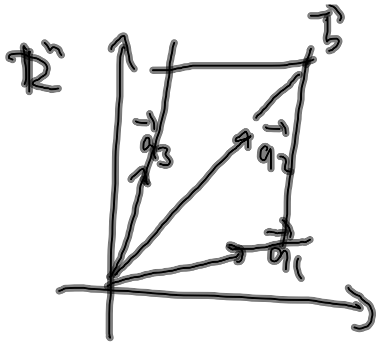
<u>Def</u> $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ <u>utspenner</u> $\mathbb{R}^m$ hvis

$$\mathrm{Sp}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^m .$$



<u>Lemma</u> Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ utspenner $\mathbb{R}^m$ er $n \geq m$.

Lineær uavhengighet



Def $\vec a_1, \dots, \vec a_n$ i $\mathbb{R}^m$ er <u>lineært uavhengige</u> hvis for hver

$\vec b \in Sp(\vec a_1, \dots, \vec a_n)$

er $\vec b = x_1 \vec a_1 + \dots + x_n \vec a_n$

for et <u>entydig</u> n-tuppel $(x_1, \dots, x_n)$.

Ellers sier vi at $\vec a_1, \dots, \vec a_n$ er <u>lineært avhengige</u>.

$$\vec b = x_2 \vec a_2 = y_1 \vec a_1 + y_3 \vec a_3$$

$$y_1 \vec a_1 - x_2 \vec a_2 + y_3 \vec a_3 = \vec 0$$

Lemma $\vec a_1, \dots, \vec a_n$ er lineært uavhengige

$$\Updownarrow$$

$x_1 \vec a_1 + \dots + x_n \vec a_n = \vec 0$ bare hvis $x_1 = \dots = x_n = 0$.

$$\parallel$$

$$0 \vec a_1 + \dots + 0 \vec a_n$$

Bevis $\Downarrow$ ok $\Uparrow$ kontrapositivt

Anta at $\vec a_1, \dots, \vec a_n$ er lineært avhengige

$$y_1 \vec a_1 + \dots + y_n \vec a_n = \vec b = z_1 \vec a_1 + \dots + z_n \vec a_n$$

der $(y_1, \dots, y_n) \neq (z_1, \dots, z_n)$.

$$\underbrace{(z_1 - y_1)}_{x_1} \vec a_1 + \dots + \underbrace{(z_n - y_n)}_{x_n} \vec a_n = \vec b - \vec b = \vec 0$$

dvs $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$.

Praktisk test:

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige

$\Updownarrow$

$A\vec{x} = \vec{b}$ har 0 eller 1 løsning for hver $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

$\Updownarrow$

$A \sim C$ trappeform

C har et pivotelement i hver søyle

(ingen fri variable $C\vec{x} = \vec{d}$)

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Er disse lineært uavhengige?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -4 \\ -7 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{3} \\ -2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

fri variabel

$\therefore$ Nei

$\vec{a}_1 + \vec{a}_3 = 2\vec{a}_2$

<u>Lemma</u> Hvis $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige er $n \leq m$.

<u>Bevis</u>

A $m \times n$ matrise

$\sim$

C ett pivotelement i hver søyle

<u>Def</u> n vektorer $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ som utspenner $\mathbb{R}^m$ <u>og</u> er lineært uavhengige kalles en <u>basis</u> for $\mathbb{R}^m$

<u>Lemma</u> Hvis $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^m$ er $n = m$.

<u>Lemma</u> $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$

$\iff$ $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ for hver $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$(A = [\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n])$

$\iff$ den reduserte trappeformen til A er I_n

$(\iff$ A er invertibel$)$

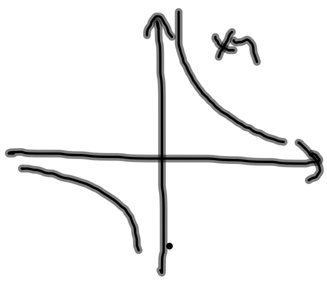
<u>Eksempel</u> $A = I_n$ $\quad \vec{a}_1 = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{a}_n = \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

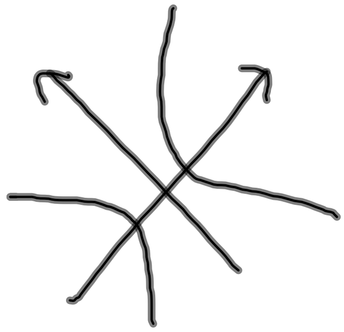
$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$

(standardbasis)

$x^2 - y^2 = 1$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$





Hvordan velge ut en basis fra en mengde vektorer som utspenner $\mathbb{R}^m$?

La $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ utspenne $\mathbb{R}^m$.

La $A = [\vec{a}_1 | \cdots | \vec{a}_n] \sim C$ trappeform

har ett pivotelement i hver av de m radene

La $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_m \le n$ være pivotsøylene. Da er

$\vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}, \dots, \vec{a}_{j_m}$ en basis for $\mathbb{R}^m$.

$$A = [\vec{a}_1 | \cdots | \vec{a}_{j_1} | \cdots | \vec{a}_{j_m} | \cdots | \vec{a}_n] \sim C \quad m \times n$$

$$A' = [\cancel{\vec{a}_1} \; | \vec{a}_{j_1} | \cdots | \vec{a}_{j_m} | \cdots | \cancel{\vec{a}_n}] \sim C' \begin{bmatrix} 1 & & ? \\ & 1 & \\ 0 & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$m \times m$

$\sim I_m$

A' invertibel

$\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_m}$ er en basis

Eks $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

3 vektorer i $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II}-2\text{I} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$$

$$\hat{j}_1 = 1 \qquad \hat{j}_2 = 3$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C'$$

$\vec{a}_1$ og $\vec{a}_3$ er en basis for $\mathbb{R}^2$

Gitt n lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^m$, hvordan utvide dem til en basis?

$n \leq m$

$\mathbb{R}^m \ni \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ lin. uavh.

$$A = \underbrace{\left[\vec{a}_1 \middle| \cdots \middle| \vec{a}_n\right]}_{n} m \sim C = m\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & ? \\ 0 & \ddots & 1 \\ & 0 & \end{bmatrix}}_{n} \text{ ~~red.~~ trappef.}$$

$$\cap \qquad\qquad \cap$$

$$A'' = \left[\vec{a}_1 \middle| \cdots \middle| \vec{a}_n \middle| \overbrace{\vec{a}_{n+1} \middle| \cdots \middle| \vec{a}_m}^{m-n \text{ nye søyler}}\right] \sim m\left[\begin{array}{c|c} \overset{n}{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & \overset{m-n}{\begin{matrix} & 0 & \\ 1 & & \\ 0 & 1 & \ddots \end{matrix}} \end{array}\right] C''$$

Føy til de $m-n$ nye søylene i A''.

<u>Eks</u>

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Vil føye til en $\vec{a}_3$ slik at $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ er en basis.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

$$A'' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} \\ +2 \\ +3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = C''$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2$ og $\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.