(4.6 Lineært spenn, lineær uavhengighet)

$m = n$ $\qquad$ $n$ vektorer $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$

$$A = [\vec{a}_1 | \cdots | \vec{a}_n] \underset{\text{radekvivalent}}{\sim} C \quad \text{trappeform}$$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige

$\Leftrightarrow$ C har ett pivotelement i hver søyle

$\Updownarrow$

C har ett pivotelement i hver rad

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ utspenner hele $\mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige

# LH 4.8 Elementære matriser

<u>Def</u> En <u>elementær matrise</u> $E$ ($m \times m$) er en matrise som oppstår ved å gjøre en (og bare en) radoperasjon på $I_m$.

Tre slag:

(1)
$$I_m = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} & i & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \sim E = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \ddots & & & & 0 \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1 \ddots 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ 0 & & & & 1 \ddots 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

| | $i$ | $j$ |
|---|---|---|
| $i$ | 0 | 1 |
| $j$ | 1 | 0 |

(2)
$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \, s \neq 0 \sim E = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} & i & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \ddots & & 0 \\ & s & \\ 0 & & \ddots 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(3)
$$I_m = \begin{array}{c|c} & \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \ddots 1 & 0 \\ 0 & 1 \ddots 1 \end{bmatrix} \end{array} \, +s \sim E = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} & i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \ddots 1 & & 0 \\ & \ddots & 0 \\ s & & 1 \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

<u>Lemma</u> La $A$ være en $m \times n$ matrise. Hvis $E$ er resultatet av en radoperasjon på $I_m$ er $EA$ lik resultatet av samme radoperasjon på $A$

$$I_m \sim E$$
$$A \sim EA$$

samme radop.

<u>Bevis</u> &

(1)

$$EA = \begin{bmatrix} I & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \text{rad } i - \\ - \text{rad } j - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \text{rad } j - \\ - \text{rad } i - \end{bmatrix}$$

(2), (3) tilsvarende.

<u>Setning</u> La $A$ være en $m \times n$ matrise med redusert trappeform lik $C$. Da er

$$A = E_k \cdots E_2 E_1 C$$

der $E_1, E_2, \ldots, E_k$ er de elementære matrisene som svarer til radoperasjonene som bringer $C$ tilbake til $A$.

Hvis $A$ er invertibel, så $C = I_m$, er

$$A = E_k \cdots E_2 E_1$$

et produkt av elementære matriser

$\Big[$ $A, B$ invertible $m \times m$ matriser

$\Longrightarrow AB$ er invertibel med

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \Big]$$

# LH 4.9 Determinanter

La $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ være en $n \times n$ kvadratisk matrise.

Determinanten til $A$ er et tall som avgjør om $A$ er invertibel eller ei.

Skrives

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$$

Hvis $n=1$ er $A = [a_{11}]$ er

$$\det([a_{11}]) = \cancel{|a_{11}|} = a_{11}$$

farlig notasjon

Hvis $n=2$ er

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Hvis $n \geq 2$ er $\det(A)$ definert induktivt via determinanter for $(n-1)\times(n-1)$-matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

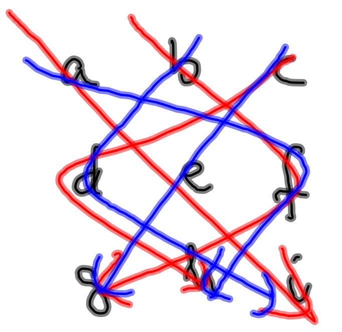
det(A) er den alternerende summen av produktet av hvert element i den første raden og determinanten til $(n-1)\times(n-1)$ matrisen som står igjen når vi stryker første rad og søylen til dette elementet.

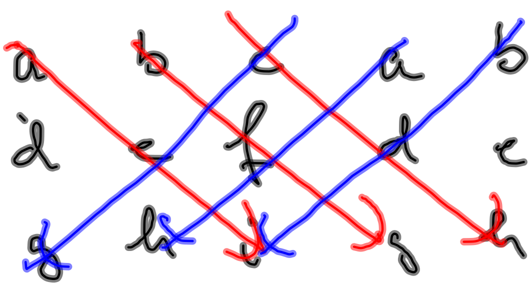
<u>Eks</u> $n=3$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei-fh) - b(di-fg) + c(dh-eg)$$

$$= aei + bfg + cdh$$
$$- afh - bdi - ceg$$





Eks $n=5$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 - 0 + 0$$

$$= (-2)(-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} - (-2)(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$- (1)(1)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} + (1)(1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

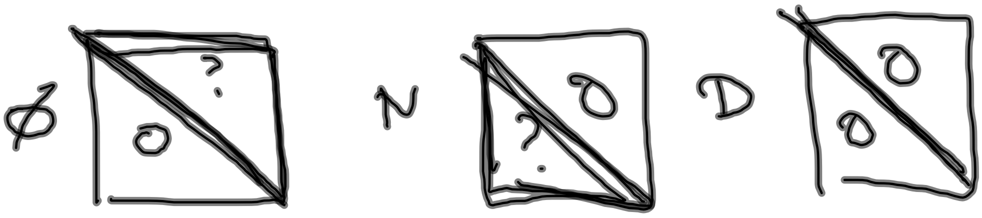
$$= 4(-8+2+2) + 2(4-1) - 1(-4) + 0$$

$$= -16 + 6 + 4 = \underline{\underline{-6}}$$

## Trekantmatriser

En $m \times n$ matrise $A = (a_{ij})_{i=1,\, j=1}^{m \quad n}$ er

- <u>øvretriangulær</u> hvis $a_{ij} = 0$ for $i > j$
- <u>nedretriangulær</u> hvis $a_{ij} = 0$ for $i < j$
- <u>diagonal</u> hvis $m = n$ og $a_{ij} = 0$ for $i \neq j$.




<u>Lemma 4.9.2</u> Hvis $A$ er en øvre- (eller nedre-) triangulær $n \times n$ matrise er

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & & ? \\ 0 & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Bevis-skisse:** Anta ok for øvretriangulære $(n-1)\times(n-1)$ matriser.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ 0 & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots\ a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\underline{\begin{vmatrix} a_{22} & ? \\ & \ddots \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix}} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{vmatrix}}_{0} + \underbrace{\cdots}_{0}$$

Vise først: $\begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & ? & \\ 0 & & \end{vmatrix} = 0.$

$$a_{11}(a_{22}\cdots a_{nn}) = \underline{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}$$

**Eks** $\det(I_n) = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1 = \underline{\underline{1}}$

## Det. og radoperasjoner  $A$ $n\times n$ matrise

**Lemma** La $B$ være gitt ved å bytte om to rader i $A$. Da er $\det(B) = -\det(A)$.

**Eks** La $E$ være den elementære matrisen gitt ved å bytte om to rader i $I_m$. Da er $\det(E) = -1$.

**Bevis** Først bytte om 1. og 2. rad

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left| \, ? \, \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \left( \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{1+k} a_{2k} \left| \, ? \, \right| + \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{k} a_{2k} \left| \, ? \, \right| \right)$$

$$= \sum_{j,k} \underbrace{\left( (-1)^{j+k} a_{1j} a_{2k} + (-1)^{j+k+1} a_{1j} a_{2k} \right)}_{=0} \left| \, ? \, \right|$$

$$= 0.$$

$n = 2$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc)$$

**Lemma** La $B$ være gitt ved å multiplisere en rad i $A$ med et tall $s$. Da er

$$\det(B) = s\det(A)$$

**Eks**

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & s & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(E) = s$$

**Bevis** 1. rad:

$$\begin{vmatrix} sa_{11} & \cdots & sa_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = sa_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{2n} \\ a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} - sa_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1} sa_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{2,n-1} \\ a_{n1} & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= s\det(A)$$

j'te rad $2 \le i \le n$.

Induksjon: vet at $\det(B') = s\det(A')$ hvis $A'$ er $(n-1)\times(n-1)$ matrise og $B'$ dannes ved å gange en rad i $A'$ med $s$.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ sa_{i1} & & sa_{in} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{2n} \\ sa_{i2} & sa_{in} \\ a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} - \end{vmatrix} + \dots$$

$$= a_{11}\, s \begin{vmatrix} a_{22} \cdots & a_{2n} \\ a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} s \begin{vmatrix} - \end{vmatrix} + \dots$$

$$= s \det(A)$$

<u>Lemma</u> La B oppstå ved å legge et multiplum av en rad i A til en annen rad i A. Da er $\det(B) = \det(A)$.

<u>Eks</u>

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ 0 & s & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \qquad \det(E) = 1$$

<u>Bevis</u> Legger s ganger i'te rad til 1. rad.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + sa_{i1} & & a_{1n} + sa_{in} \\ a_{i1} & & a_{in} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{11} + sa_{i1}) \begin{vmatrix} a_{22} & & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} - (a_{12} + sa_{i2}) \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} + \dots$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} + \dots = \det A$$

$$+ sa_{i1} \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} - sa_{i2} \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} + \dots = s \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{in} \\ a_{i1} & a_{in} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) + s \cdot 0 = \det(A)$$

Lemma Hvis to av radene i $A$ er like er $\det(A) = 0$.

Bevis $B = A$ med to rader byttet om $= A$

$\det(B) = -\det(A) = \det(A) \rightarrow \det(A) = 0$

---

Teorem $A$ en $n \times n$ matrise.

$\det(A) \neq 0 \iff A$ er invertibel

---

Bevis Vet at $A$ er invertibel $\iff$ den reduserte trappeformen til $A$ er $I_n$.

La $A \sim C$ der $C$ er på redusert trappeform.

La $C = B_0 \sim B_1 \sim \dots \sim B_{k-1} \sim B_k = A$

der vi kommer fra $B_{i-1}$ til $B_i$ ved en radoperasjon, som multipliserer determinanten med en faktor $s_i = \det(E_i) \neq 0$

Da er $\det(B_i) = s_i \det(B_{i-1})$

Da er $\det(A) = \det(B_k) = \underbrace{s_k s_{k-1} \cdots s_1}_{\neq 0} \det(C)$

$\det(A) \neq 0 \iff \det(C) \neq 0$
$\iff C = I_n \iff A$ er invertibel.